



Cours d'optique géométrique matricielle, introduction aux phénomènes d'interférences et de diffraction

Yann VAILLS
Université d'Orléans

<i>Chapitre 1</i> : APPROXIMATIONS DE L'OPTIQUE GÉOMÉTRIQUE, PRINCIPE DE FERMAT	<i>page 3</i>
<i>Chapitre 2</i> : APPROXIMATION DE GAUSS	<i>page 11</i>
<i>Chapitre 3</i> : SYSTÈMES CENTRÉS	<i>page 19</i>
<i>Chapitre 4</i> : L'ŒIL	<i>page 30</i>
<i>Chapitre 5</i> : ABERRATION CHROMATIQUE – DOUBLET	<i>page 33</i>
<i>Chapitre 6</i> : ASSOCIATION DE 2 SYSTÈMES CENTRÉS	<i>page 37</i>
<i>Chapitre 7</i> : SYSTÈMES CENTRÉS AFOCAUX	<i>page 39</i>
<i>Chapitre 8</i> : INTERFERENCES	<i>page 44</i>
<i>Chapitre 9</i> : DIFFRACTION	<i>page 54</i>

Références :

- Optique, fondements et applications, J.P. PEREZ, MASSON *Sciences*, DUNOD
- Sciences et vie Junior, Dossier hors série n°51, Janvier 2003

Chapitre 1

APPROXIMATIONS DE L'OPTIQUE GÉOMÉTRIQUE, PRINCIPE DE FERMAT

Sans aborder dans le détail mathématique les théories modernes, il est possible d'acquérir une idée des conceptions actuelles de la lumière.

I. Conception ondulatoire, corpusculaire, quantique

- Les phénomènes d'interférences, de diffraction, la polarisation sont bien décrits par la théorie des ondes électromagnétiques de Maxwell. La vitesse de propagation de ces ondes dans le vide est une caractéristique (indépendante de la fréquence) et une constante universelle

$$c_0 = 2,99792458 \cdot 10^8 \text{ m.s}^{-1}$$

- L'effet photoélectrique ou l'effet Compton sont bien décrits en considérant que la lumière est constituée de corpuscules : les *photons*.

Ces deux théories ne sont pas contradictoires, il existe une théorie : *l'électrodynamique quantique*, qui permet de rendre compte de l'ensemble de ces phénomènes. C'est une théorie :

- Corpusculaire dans la mesure où elle décrit le nombre, l'état et l'évolution d'un ensemble de *photons*
- Ondulatoire car c'est une description quantique mettant en jeu la notion de *fonction d'onde*.

Einstein-Planck : $E = h\nu$ $h = 6,62 \cdot 10^{-34} \text{ J.s}$

$E = \text{énergie du photon de fréquence } \nu$

de Broglie : $\lambda = h / \|\vec{p}\|$

\vec{p} est le vecteur impulsion ou quantité de mouvement du photon

Toutes les ondes électromagnétiques, quelle que soit leurs fréquences, présentent des propriétés ondulatoires et corpusculaires. Ces propriétés sont plus ou moins facilement observables suivant les valeurs de ν :

- La détection individuelle d'un photon est d'autant plus difficile que la fréquence est petite (énergie faible)
- Les propriétés ondulatoires sont d'autant plus faciles à mettre en évidence que cette fréquence est petite (λ grande).

II. Propagation dans un milieu (transparent) autre que le vide

Dans un milieu autre que le vide les ondes électromagnétiques interagissent avec les atomes qu'elles rencontrent sur leur parcours. La vitesse qui intervient dans l'équation qui décrit la propagation des ondes est $c \neq c_0$ et dépend de ν .

On définit l'indice de réfraction du milieu par la relation :

$$n(\nu) = \frac{c_0}{c(\nu)}$$

L'indice de réfraction dépend à la fois du milieu et de la fréquence de l'onde. La dépendance en fréquence de l'indice caractérise le **pouvoir dispersif** du milieu. Parmi nombreuses relations empiriques permettant d'exprimer les variations de l'indice de réfraction en fonction des caractéristiques des ondes, citons la formule de Cauchy qui donne n en fonction de la longueur d'onde:

$$n(\lambda) = A_0 + A_1\lambda^{-2} + A_2\lambda^{-4} + \dots$$

En général $n(\nu)$ est supérieur à 1. Dans le domaine optique (celui de la lumière, c'est-à-dire des ondes électromagnétiques du domaine du visible : $400 \text{ nm} < \lambda < 800 \text{ nm}$) l'indice est de l'ordre de 1,5 à 1,7 pour les verres courants.

Voici quelques autres exemples :

$n = 1,33$	eau
$n = 2,419$	diamant
$n = 1,000294$	air (conditions normales)

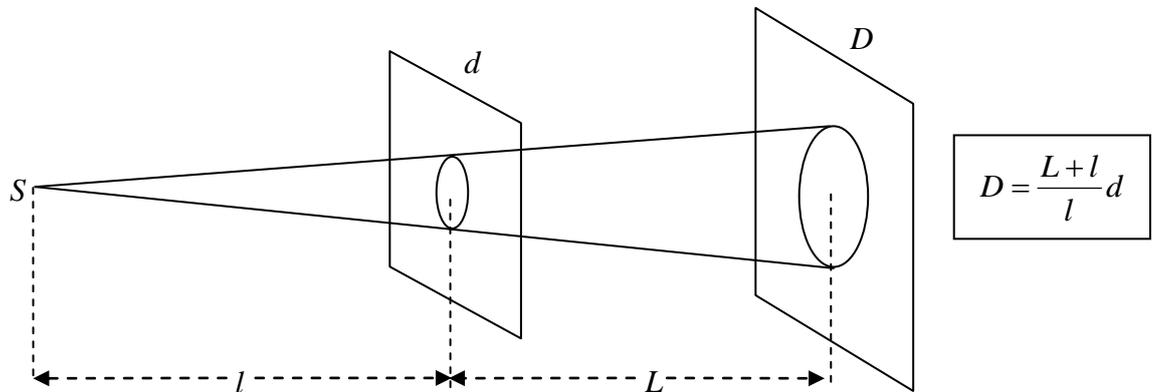
III. Notion de rayons lumineux

La lumière est un phénomène de transport d'énergie et d'information entre 2 points de l'espace, transport pouvant se produire même à travers l'espace vide.

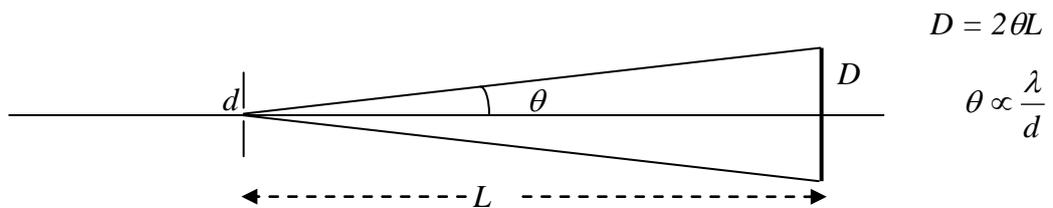
La lumière est un sous ensemble de celui des rayonnements électromagnétiques, elle a la particularité d'être visible, c'est-à-dire détecté par l'œil.

	γ	X	UV	visible	IR	micro-ondes
λ (Å)	← 0,1 →	100 →	4000 →	6500 →	10^7 →	
λ (nm)	0,01	10	400	650	10^6	
λ (µm)	10^{-5}	10^{-2}	0,4	0,65	10^3	
ν (Hz)	3.10^{19}	3.10^{16}	$7,5.10^{14}$	$4,6.10^{14}$	3.10^{11}	

1. Expérience de la chambre noire



Cette expérience donne l'idée de propagation rectiligne de la lumière. Cependant, si d diminue, il arrive un moment où, au lieu de continuer à diminuer, D augmente. On vérifie alors que D ne dépend plus de la position de la source S et qu'il n'est plus proportionnel à d mais lui est inversement proportionnel.

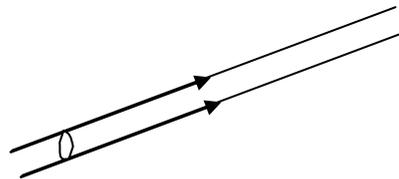


On n'est plus alors dans le cadre de l'optique géométrique, le phénomène est appelé *diffraction*, le modèle des rayons lumineux ne permet pas de rendre compte de cette expérience.

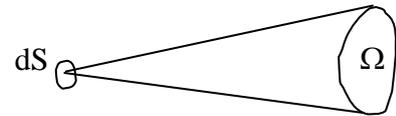
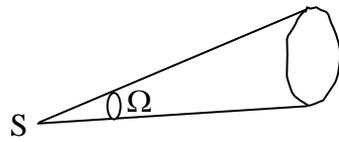
2. Définitions en optique géométrique

Rayon lumineux : ligne entre deux points de l'espace qui représente le chemin suivi par la lumière pour aller d'un point à un autre.

Pinceau lumineux



Faisceaux divergents



Ensemble des rayons passant à travers dS et compris dans l'angle solide Ω

IV. Trajet d'un rayon lumineux

L'expérience quotidienne nous montre que si la lumière se propage en ligne droite, il est des situations où il apparaît que cette propagation n'est plus rectiligne :

- La réflexion sur un miroir
- La traversée de la surface de séparation de deux milieux transparents : réfraction – On dira que ces milieux ont des indices n différents
- La diffusion par de fines particules
- La diffraction (évoquée ci-dessus)
- Le changement de direction peut dépendre de la coloration (on dira longueur d'onde) : dispersion chromatique.

On aimerait pouvoir déterminer la trajectoire de la lumière dès que l'on connaît les propriétés du milieu où elle se propage. C'est ce que permet de faire le **Principe de Fermat**.

Le trajet effectivement emprunté par le rayon lumineux entre deux points A et B est tel que le temps de parcours de la lumière entre ces deux points est stationnaire

$f(x,y)$ est stationnaire en $M(x_0,y_0)$ si

$$\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} \right)_{x_0,y_0} = 0 \qquad \left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \right)_{x_0,y_0} = 0$$

1. Formulation moderne du Principe de Fermat – chemin optique



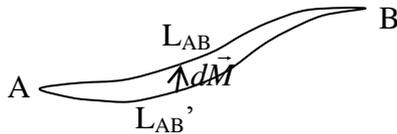
$\Delta t_i = \frac{\Delta_i}{c_i} = \frac{n_i \Delta_i}{c_0}$ où c_0 est la vitesse de la lumière dans le vide, c_i et n_i la vitesse de la lumière et l'indice du milieu sur la partie i du parcours

$$t_{AB} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{c_0} \sum_{i=1}^N n_i \Delta_i = \frac{1}{c_0} \int_A^B n(M) dl$$

on pose :

$$L_{AB} = \int_A^B n(M) dl \quad \text{chemin optique entre A et B.}$$

« *Le trajet effectivement suivi par la lumière pour aller de A à B correspond à une valeur stationnaire du chemin optique par rapport aux trajets voisins allant de A à B* ».



$|L'_{AB} - L_{AB}|$ infiniment petit de 2^{ème} d'ordre par rapport à la plus grande valeur de $d\vec{M}$

Principe de Fermat $\Leftrightarrow dL_{AB} = 0$

Calcul du chemin optique

Trajet $y = f(x)$

Indice $n(x, y) = n(x, f(x))$

dl le long du trajet AB

$$dl = (dx^2 + dy^2)^{1/2} = [1 + f'^2(x)]^{1/2} dx$$

$$L_{AB} = \int_A^B n(M) dl = \int n(x, f(x)) [1 + f'^2(x)]^{1/2} dx$$

2. Conséquences immédiates

- Dans un milieu homogène la propagation est rectiligne

$$L_{AB} = \int_A^B n(M) dl = n \int_A^B dl = n C_{AB}$$

C_{AB} est minimal lorsque le trajet est une droite.

- Retour inverse de la lumière

L'indice ne dépend pas de la direction. Si L_{AB} est stationnaire, L_{BA} l'est aussi. Ainsi, l'expérience montre que dans un milieu transparent le trajet suivi par la lumière est indépendant du sens dans lequel la celle-ci se propage.

3. Surfaces d'onde – Loi de Malus

Définition : soit une source ponctuelle S, on appelle **surface d'onde** le lieu des points M tels que le chemin optique L_{SM} , compté le long d'un rayon lumineux, soit constant.

Loi de Malus : on montre que qu'après un nombre quelconque de réflexions et de réfractions les rayons issus d'une source ponctuelle sont normaux aux surfaces d'ondes.

4. Indépendance des rayons lumineux

Les cheminements des différents rayons lumineux traversant un instrument d'optique sont indépendants les uns des autres. C'est une hypothèse fondamentale de l'optique géométrique.

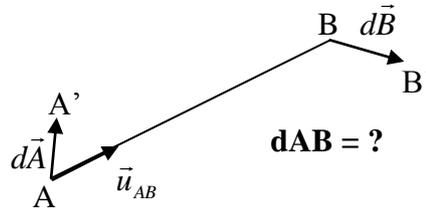
Optique géométrique - Interférences - Diffraction

Yann VAILLS (e-mail : Yann.Vaills@univ-orleans.fr)

Les circonstances particulières où, au lieu d'être indépendants les rayons lumineux peuvent interférer, constituent le domaine de l'optique physique.

V. Lois de Snell-Descartes

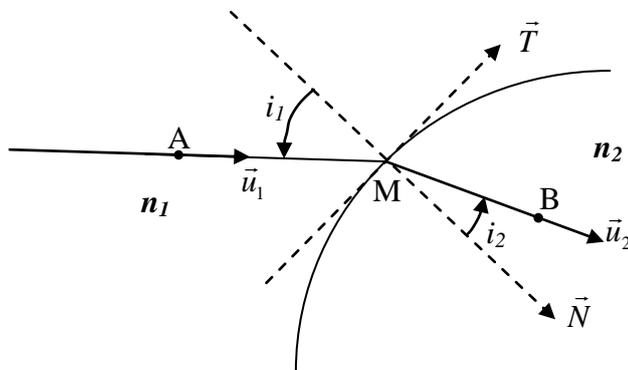
1. Résultat préliminaire



$$AB^2 = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} \quad dAB = \frac{\overrightarrow{AB}}{AB} d\overrightarrow{AB} \quad dAB = \vec{u}_{AB} \cdot (d\vec{B} - d\vec{A})$$

2. Réfraction

Soient deux milieux homogènes d'indices n_1 et n_2 .



Dans chaque milieu le trajet des rayons est rectiligne. Pour A et B fixes montrons que le point M est unique.

Supposons que M puisse varier autour d'une certaine position (dans le plan tangent). On a alors :

$$L_{AB} = L_{AM} + L_{MB} = n_1 AM + n_2 MB = \text{constante}$$

$$d(L_{AB}) = n_1 d(AM) + n_2 d(MB) = (n_1 \vec{u}_1 - n_2 \vec{u}_2) \cdot d\vec{M} = 0$$

$$n_1 \vec{u}_1 - n_2 \vec{u}_2 = \alpha \vec{N}$$

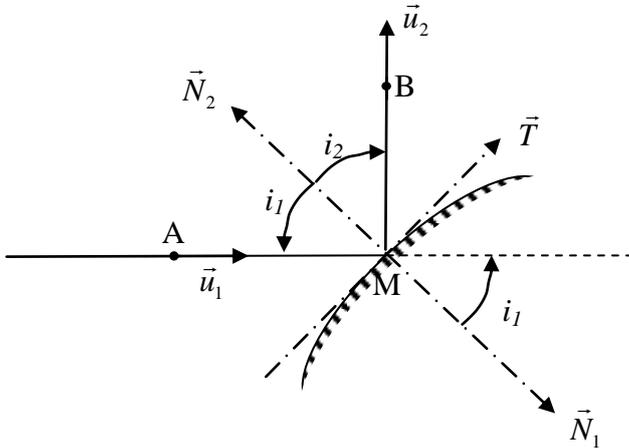
$$\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{N} \text{ coplanaires}$$

$$\vec{N} \wedge (n_1 \vec{u}_1 - n_2 \vec{u}_2) = \vec{0}$$

$$\vec{N} \wedge \vec{u}_1 = \sin i_1 \quad \vec{N} \wedge \vec{u}_2 = \sin i_2$$

$$n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$$

3. Reflexion



Par un calcul identique au précédent, mais avec cette fois $n_1 = n_2$, on montre que :

$\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{N}$ coplanaires

$$i_2 = -i_1$$

4. Conséquences et applications

a) Réflexion totale

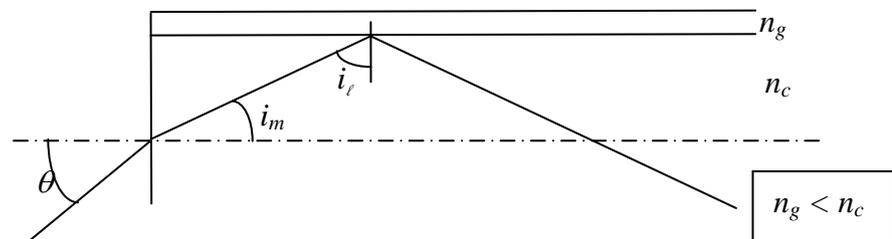
$$n_2 > n_1 \quad \Rightarrow \quad \sin i_2 = \frac{n_1}{n_2} \sin i_1 \quad \text{et} \quad \exists i_2 \forall i_1$$

$$n_2 < n_1 \quad \Rightarrow \quad \exists i_c \text{ valeur supérieure de } i_1 \text{ telle que } \sin i_c = \frac{n_2}{n_1}$$

$i \leq i_c \Rightarrow$ il existe un rayon réfracté

$i > i_c \Rightarrow$ il y a réflexion totale

b) Fibres optiques à saut d'indice



θ_m est l'angle d'ouverture maximale pour qu'il y ait guidage :

$$\sin \theta_m = n_c \sin i_m = n_c \cos i_c = n_c \sqrt{1 - \frac{n_g^2}{n_c^2}}$$

$$\sin \theta_m = \sqrt{n_c^2 - n_g^2} \quad \text{pour } n_c = 1,6 \text{ on a } \frac{n_g}{n_c} = 0,99, \sin \theta_m = 0,22 \text{ et } \theta_m = 13^\circ$$

VI. Cas particulier : Trajectoire des rayons lumineux dans un milieu d'indice variable

Exemples de phénomènes concernés :

- la propagation de la lumière dans les fibres optiques à gradient d'indice
- le mirage

L'indice de réfraction du milieu dépend alors des coordonnées d'espace. On écrira : $n(M)$. C'est par exemple le cas d'un verre dont la composition varie d'un point à l'autre.

EXERCICES ET PROBLEMES – CHAPITRE 1

1) Propagation d'une onde harmonique monochromatique

1.1 La fréquence d'oscillation d'une onde lumineuse monochromatique est de $4,6 \times 10^{14}$ Hz. Déterminer la période de l'onde, sa longueur d'onde dans le vide, dans le verre ($n = 1,52$) et dans le diamant ($n = 2,42$). Calculer l'énergie d'un photon associé à cette onde. Quelle est la couleur observée lorsque cette onde se propage, dans l'air, dans l'eau ?

$$\text{Données : } c = 3 \times 10^8 \text{ m.s}^{-1}, h = 6.63 \times 10^{-34} \text{ J.s}$$

1.2 Une onde lumineuse, dont l'expression est donnée ci-dessous, se propage dans du benzène :

$$\psi(z,t) = 3 \exp[j(2,51 t - 0,0125 z + 0,17)] \text{ avec } z \text{ en nm et } t \text{ en fs.}$$

Déterminer son amplitude, sa longueur d'onde, sa fréquence, sa vitesse (de phase) et le déphasage. Quel est l'indice de réfraction du benzène ?

1.3 Un laser He-Ne délivre dans le vide un faisceau à 6328 \AA . Combien de vibrations observe-t-on sur une distance de $50 \text{ }\mu\text{m}$ (épaisseur d'une feuille de papier) ? Sur quelle distance observe-t-on le même nombre de vibrations micro-ondes ($\nu = 10 \text{ GHz}$) ?

1.4 Un piston frappe périodiquement l'extrémité d'une longue barre métallique de telle manière qu'une onde de compression de longueur d'onde égale à $4,3 \text{ m}$ est produite. L'onde se propage dans la barre à la vitesse de $3,5 \text{ km.s}^{-1}$. Quelle est la fréquence de l'onde ?

1.5 Un rayon de lumière jaune (lampe à sodium, $\lambda = 589 \text{ nm}$) traverse un réservoir de 20 m de long rempli de glycérine ($n = 1,47$) en un temps t_1 . Il faut un temps t_2 à cette lumière pour traverser le même réservoir lorsque celui-ci est rempli avec du disulfure de carbone ($n = 1,63$). Calculer la valeur du temps $t_2 - t_1$.

1.6 La valeur de l'indice de réfraction d'un milieu dépend de la longueur d'onde considérée. Pour le domaine des radiations visibles, le mathématicien et physicien français A. L. Cauchy (1789-1857) a déterminé une formule empirique pour $n(\lambda)$:

$$n(\lambda) \approx C_1 + C_2 / \lambda^2$$

Un cristal de quartz a un indice de réfraction de 1,557 et de 1,547 à 410 nm et 550 nm respectivement. Evaluer les constantes C_1 et C_2 pour le quartz et donner la valeur de l'indice du quartz à 610 nm.

2) Lois de Snell-Descartes relatives à la réfraction et à la réflexion

2.1 Calculer l'angle de transmission d'un rayon lumineux se propageant dans l'air et frappant un bloc de verre à 30° ($n_v = 1,5$).

2.2 Un rayon lumineux jaune émis dans l'air par une lampe à décharge de sodium frappe une surface en diamant à 45° . Si à cette fréquence $n_d = 2,42$, calculer l'angle de déviation du rayon.

2.3 Un faisceau laser est incident sur une interface air-liquide à 55° . Le faisceau réfracté se propage à 40° . Quel est l'indice de réfraction du liquide ?

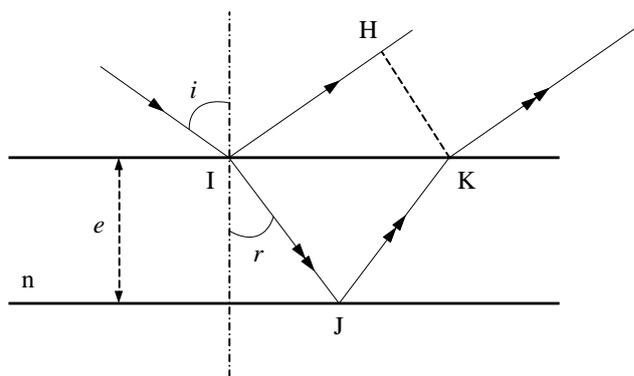
2.4 Un objet de longueur l est plongé dans de l'eau ($n = 1.33$). Montrer que la longueur apparente de l'objet est égale au $\frac{3}{4}$ de sa longueur réelle (faire un schéma des rayons réfractés).

2.5 De la lumière se propageant dans l'air tombe sur une interface air-verre. Si $n_d = 1,7$, trouver l'angle d'incidence θ_i tel que l'angle de transmission soit égal à $\frac{1}{2} \theta_i$.

2.6 Prisme rectangulaire : réflexion totale

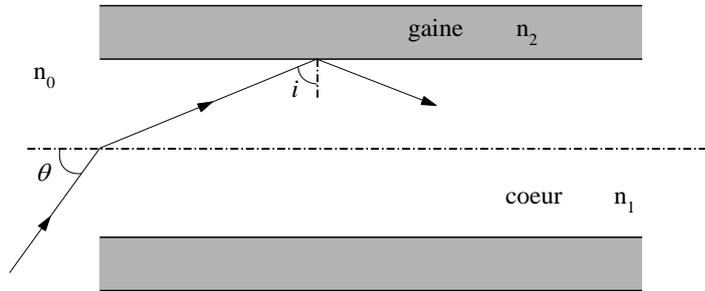
Dans quel cas un prisme en verre à angle droit situé dans l'air peut-il être utilisé comme miroir ? (on prendra $n_v = 1,5$)

3) lame à faces parallèles



Calculer la différence de chemin optique entre le rayon réfléchi par le dioptre inférieur d'une lame à faces parallèles et le rayon réfléchi par le dioptre supérieur. L'indice de lame est $n = 1,6$, l'épaisseur $e = 2$ mm et l'angle d'incidence $i = 30^\circ$.

4) Fibre optique à saut d'indice



Une fibre optique cylindrique est constituée d'un cœur transparent homogène et isotrope, d'indice de réfraction n_1 , entouré d'une gaine, elle aussi transparente homogène et isotrope, dont l'indice de

réfraction n_2 est inférieur à n_1 . La fibre optique est plongée dans un milieu d'indice n_0 .

4.1 Montrer que la lumière ne peut se propager à l'intérieur de la fibre que si l'angle d'incidence i est supérieur à un angle critique i_c que l'on déterminera en fonction de n_1 et n_2 .

4.2 La face d'entrée de la fibre est plane. On désigne par θ l'angle que fait dans un milieu d'indice n_0 , un rayon avec la normale à la face d'entrée. Déterminer, en fonction de n_0 , n_1 et n_2 , l'angle d'acceptance θ_m correspondant à i_c .

4.3 Calculer i_c et l'ouverture numérique de la fibre ($ON = n_0 \times \sin \theta_m$) avec $n_0=1$ (air), $n_1=1,5$ et $n_2/n_1=0,99$.

Chapitre 2

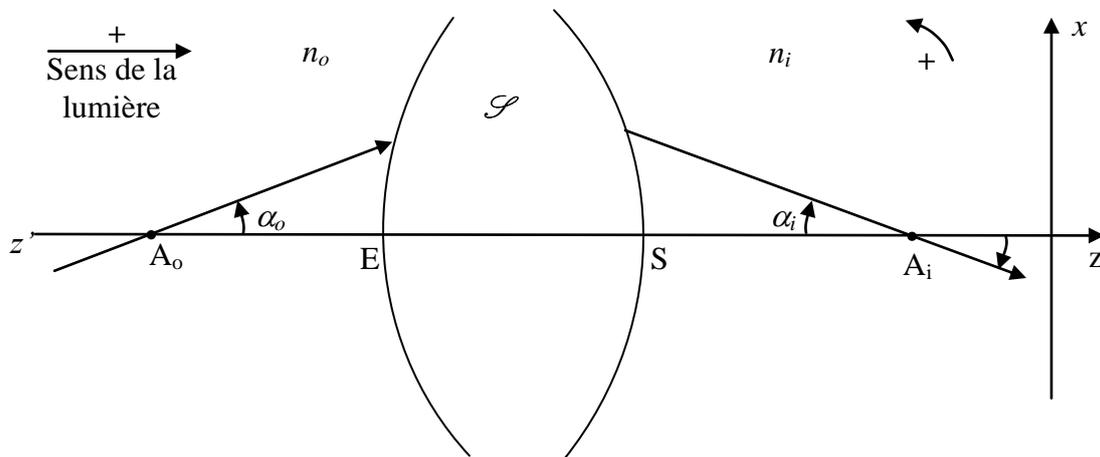
APPROXIMATION DE GAUSS

I. Conventions – Définitions

Système dioptrique : dispositif ne comportant que des dioptries. On se limitera au cas où il existe un axe de révolution : le système est alors centré

Axe optique : axe de symétrie d'un système centré

Convention



Stigmatisme : un système optique \mathcal{S} est stigmatique pour un couple de points A_o, A_i , si tout rayon lumineux passant par A_o passe par A_i après avoir traversé le système. A_o et A_i sont dits **conjugués** par rapport au système optique. A_i est l'**image du point objet** A_o et inversement en changeant le sens de propagation de la lumière.

Réel(le) et virtuel(le) :

Est dit(e) **réel(le)** tout objet ou image par lequel (laquelle) passent les rayons lumineux. Les **objets réels** sont dans l'espace objet, les **images réelles** sont dans l'espace image.

Est dit(e) **virtuel(le)** tout objet ou image par lequel (laquelle) passent les projections des rayons lumineux. Les **objets virtuels** sont dans l'espace image, les **images virtuelles** sont dans l'espace objet.

Dioptrie : surface séparant deux milieux homogènes d'indices n différents

II. Conditions de stigmatisme

1. Stigmatisme rigoureux

Au voisinage de deux points A_o et A_i pour lesquels il y a stigmatisme, les surfaces d'onde sont des sphères. A_o et A_i peuvent être considérés comme des surfaces d'onde de rayon nul. Il en résulte que pour les rayons lumineux joignant deux points stigmatiques, le chemin optique est le même : $L_{A_o A_i} = c^{te}$

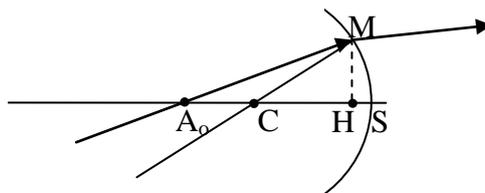
2. Stigmatisme approché

Un système optique centré est utilisé dans les conditions de Gauss si tous les rayons qui le traversent font des angles faibles avec l'axe optique. Les rayons sont dits paraxiaux.

Il vient alors une question : qu'est-ce qu'un angle « petit » au sens de l'optique géométrique ? C'est un angle tel que l'on pourra le considérer comme une bonne évaluation de son sinus :

$$\sin \theta \approx \theta$$

- La loi de la réfraction s'écrit alors : $n_1 i_1 = n_2 i_2$
- La partie utile des dioptries est restreinte, sur le schéma ci-dessous, on pourra confondre H et S.



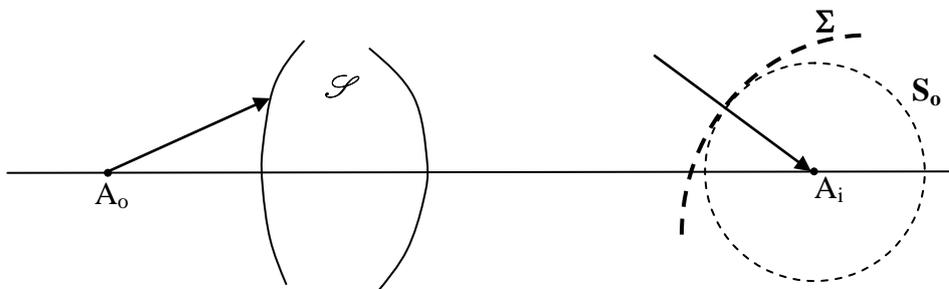
Ceci constitue les approximations de Gauss.

Conséquences pour un système centré : formation des images

Stigmatisme approché sur l'axe

Après traversée du système \mathcal{S} les rayons sont normaux aux surfaces d'onde. Au voisinage de l'axe on peut confondre la surface d'onde Σ (de révolution) avec la sphère S_o (surosculatrice) de centre A_i . Tous les rayons obéissant aux conditions de Gauss passent au voisinage de A_i ; il y a stigmatisme approché pour A_o et A_i .

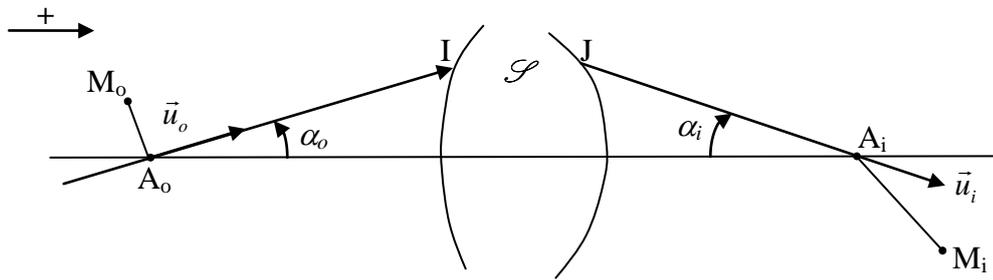
Chaque point de l'axe admet donc un conjugué au sens du stigmatisme approché dans les conditions de Gauss.



Stigmatisme approché dans l'espace

Le but d'un instrument d'optique ne se limite pas à obtenir une image ponctuelle d'un objet ponctuel, il s'agit d'obtenir une image étendue d'un objet étendu.

Soit un système centré et le couple de points conjugués $A_o A_i$ sur l'axe.



$$L_{A_o A_i} = n_o \vec{u}_o \cdot \overrightarrow{A_o I} + L_{IJ} + n_i \vec{u}_i \cdot \overrightarrow{J A_i}$$

pour le couple $M_o M_i$ tel que $\overrightarrow{A_o M_o} = d\vec{A}_o$, $\overrightarrow{A_i M_i} = d\vec{A}_i$

$$dL = -n_o \vec{u}_o \cdot d\vec{A}_o + n_i \vec{u}_i \cdot d\vec{A}_i$$

$$dL = -n_o \vec{u}_o \cdot \overrightarrow{A_o M_o} + n_i \vec{u}_i \cdot \overrightarrow{A_i M_i}$$

M_o et M_i constituent un couple de points conjugués si l'expression précédente est indépendante de \vec{u}_o pour A_o et M_o donnés. Il faut donc :

$$-n_o \vec{u}_o \cdot \overrightarrow{A_o M_o} + n_i \vec{u}_i \cdot \overrightarrow{A_i M_i} = c^{te}$$

1^{er} cas : $\overrightarrow{A_o M_o}$ perpendiculaire à l'axe, soit $B_o \equiv M_o$

$$-n_o \overline{A_o B_o} \sin \alpha_o + n_i \overline{A_i B_i} \sin \alpha_i = c^{te}$$

$$\alpha_o = 0 \Rightarrow \alpha_i = 0 \text{ et } c^{te} = 0 \text{ et}$$

$$n_o \overline{A_o B_o} \sin \alpha_o = n_i \overline{A_i B_i} \sin \alpha_i \quad \text{relation des sinus d'Abbe}$$

Il y a alors conservation du stigmatisme dans un plan de front perpendiculaire à l'axe optique. Le système est aplanétique.

Compte tenu des conditions de Gauss on a

$$n_o \overline{A_o B_o} \alpha_o = n_i \overline{A_i B_i} \alpha_i \quad \text{relation de Lagrange}$$

On pose $G_t = \frac{A_i B_i}{A_o B_o}$ grandissement transversal

$$G_a = \frac{\alpha_i}{\alpha_o} \text{ grandissement angulaire}$$

Pour un système centré aplanétique on a donc :

$$\frac{n_i}{n_o} G_t G_a = 1$$

2^{ème} cas : M_o sur l'axe, soit $C_o \equiv M_o$

$$-n_o \overline{A_o C_o} + n_i \overline{A_i C_i} = c^{te}$$

$$-n_o \overline{A_o C_o} \cos \alpha_o + n_i \overline{A_i C_i} \cos \alpha_i = c^{te}$$

$$\alpha_o = 0 \Rightarrow \alpha_i = 0 \text{ et } c^{te} = n_i \overline{A_i C_i} - n_o \overline{A_o C_o}$$

on en déduit la condition d'Herschel

$$n_o \overline{A_o C_o} \sin^2 \frac{\alpha_o}{2} = n_i \overline{A_i B_i} \sin^2 \frac{\alpha_i}{2}$$

Le système étant utilisé dans les conditions de Gauss, on a :

$$n_o \overline{A_o C_o} \alpha_o^2 = n_i \overline{A_i B_i} \alpha_i^2$$

Cette condition exprime donc la conservation du stigmatisme approché suivant l'axe optique centré.

III. Dioptre sphérique dans l'approximation de Gauss

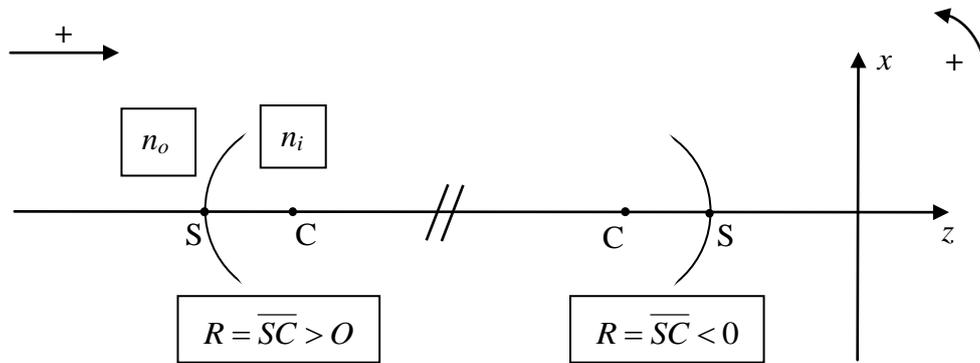
1. Définition

C'est une surface sphérique, de centre C , de rayon R , séparant deux milieux transparents d'indices différents.

Le dioptre possède le *poli spéculaire* : les écarts locaux à la sphéricité sont petits devant la longueur d'onde.

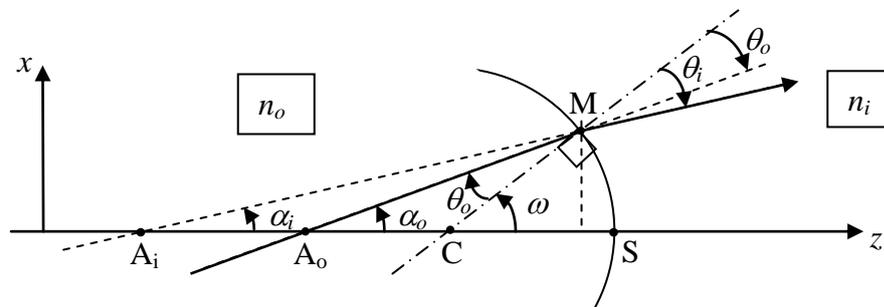
Du fait des conditions de Gauss le dioptre est en fait limité à une calotte sphérique de sommet S et de dimension petite devant le rayon de courbure.

Convention



2. Relation de conjugaison

Dans le cadre de l'approximation de Gauss, il y a stigmatisme approché pour tout point de l'axe, c'est-à-dire que tout point A_o a une image (un point conjugué), et qu'il existe une relation liant la position de A_i à celle de A_o indépendante de l'inclinaison des rayons lumineux qui passent par A_o .



$$\omega = \alpha_o - \theta_o \quad \theta_o = \alpha_o - \omega \quad \text{et} \quad n_i \theta_i = n_o \theta_o$$

$$\omega = \alpha_i - \theta_i \quad \theta_i = \alpha_i - \omega \quad n_i(\alpha_i - \omega) = n_o(\alpha_o - \omega)$$

dans l'approximation de Gauss on peut écrire :

$$n_i \left(\frac{x}{A_i S} - \frac{x}{CS} \right) = n_o \left(\frac{x}{A_o S} - \frac{x}{CS} \right), \text{ c'est-à-dire } \frac{n_o}{A_o S} - \frac{n_i}{A_i S} = \frac{n_o - n_i}{CS}$$

Soit, en prenant pour origine le sommet du dioptre :

$$\frac{n_i}{SA_i} - \frac{n_o}{SA_o} = \frac{n_i - n_o}{SC} = \frac{n_i - n_o}{R}$$

$$\boxed{\frac{n_i}{SA_i} - \frac{n_o}{SA_o} = V} \text{ qui constitue la } \underline{\text{relation de conjugaison du dioptre}}$$

$$\text{avec } \boxed{V = \frac{n_i - n_o}{R}} \underline{\text{vergence du dioptre}}$$

3. Vergence d'un dioptre

La relation précédente est algébrique, V a une valeur indépendante du sens de propagation de la lumière : $n_i - n_o$ et R changent de signe en même temps. La vergence d'un dioptre est une propriété intrinsèque, elle s'exprime en **dioptrie(s)** (δ) dans le système S.I.

Remarque : $1 \delta = 1 \text{ m}^{-1}$

Signification physique de la vergence

En introduisant V dans les relations de départ on obtient

$$n_i \alpha_i = n_o \alpha_o + (n_i - n_o) \omega, \text{ soit}$$

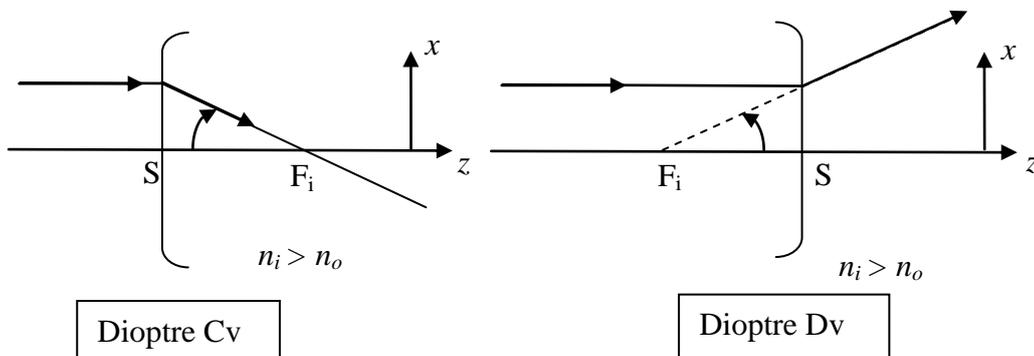
$$n_i \alpha_i = n_o \alpha_o - \frac{n_i - n_o}{SC} x$$

$$n_i \alpha_i = n_o \alpha_o - Vx$$

Soit un rayon incident parallèle à l'axe ($\alpha = 0$) et tel que $x > 0$

$V > 0$: dioptre convergent (Cv) alors $\alpha_i < 0$

$V < 0$: dioptre divergent (Dv) alors $\alpha_i > 0$



Foyers – distances focales

Les longueurs focales, ou **focales image** et **objet** sont les longueurs algébriques définies respectivement par les relations ci-dessous :

$$\boxed{f_i = \frac{n_i}{V}} \quad \boxed{f_o = -\frac{n_o}{V}}$$

foyer image : c'est le conjugué du point objet à l'infini sur l'axe optique

$$\frac{n_i}{SF_i} = V \quad \overline{SF_i} = f_i = \frac{n_i}{V}$$

foyer objet : c'est le conjugué du point image à l'infini sur l'axe optique

$$-\frac{n_o}{SF_o} = V \quad \overline{SF_o} = f_o = -\frac{n_o}{V}$$

Autres expressions de la conjugaison

En reportant $\overline{SF_i} = \frac{n_i}{V}$ et $\overline{SF_o} = -\frac{n_o}{V}$ dans la relation de conjugaison on obtient immédiatement :

$$\boxed{\frac{\overline{SF_i}}{SA_i} + \frac{\overline{SF_o}}{SA_o} = 1} \text{ ou encore } \boxed{\frac{f_i}{p_i} + \frac{f_o}{p_o} = 1}$$

en posant $\overline{SA_i} = p_i$ et $\overline{SA_o} = p_o$

on établirait de même : $\boxed{\overline{F_i A_i} \cdot \overline{F_o A_o} = \overline{SF_i} \cdot \overline{SF_o} = f_i f_o}$ (Newton)

4. Miroirs sphériques

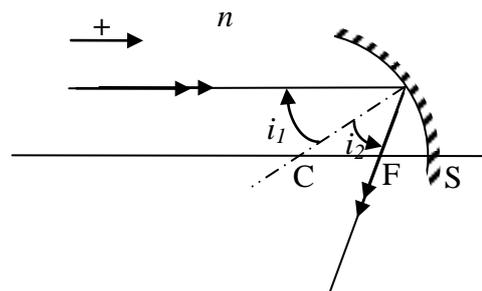
Avec pour sens positif celui de la lumière à l'entrée la loi de la réflexion $i_2 = -i_1$ peut-être considéré comme un cas particulier de celle de la réfraction $n_o \sin i_o = n_i \sin i_i$ où on poserait $n_i = -n_o$

Les relations établies pour le dioptrique sphérique se transposent alors immédiatement dans le cas du miroir sphérique.

$$\frac{n_i}{SA_i} - \frac{n_o}{SA_o} = \frac{n_i - n_o}{SC} = \frac{n_i - n_o}{R} = V \Rightarrow V = -\frac{2n}{R}$$

$$\boxed{\frac{1}{SA_i} + \frac{1}{SA_o} = \frac{2}{R}}$$

$$\overline{SF_i} = \overline{SF_o} = \frac{R}{2} = f_i = f_o = f$$



$$\frac{\overline{SF_i}}{\overline{SA_i}} + \frac{\overline{SF_o}}{\overline{SA_o}} = 1 \text{ ou } \frac{f_i}{p_i} + \frac{f_o}{p_o} = 1$$

$$\overline{F_i A_i} \cdot \overline{F_o A_o} = f_i f_o = f^2$$

IV. Approximation de Gauss et calcul matriciel

A. Matrice de réfraction

Le franchissement d'un dioptre sphérique par un rayon méridien (rayons parallèles à l'axe optique ou ayant un point commun avec celui-ci) fait apparaître des équations linéaires entre les grandeurs caractérisant les rayons lumineux.

$$x_i = x_o$$

$$n_i \alpha_i = n_o \alpha_o - V x_o$$

on définit la matrice colonne X dont les éléments sont :

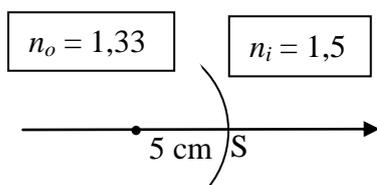
- la position du point d'intersection du rayon lumineux avec le dioptre
- « l'angle optique » $n\alpha$ produit de l'indice de réfraction par l'angle d'inclinaison sur l'axe optique.

$$\begin{pmatrix} x_i \\ n_i \alpha_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -V & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_o \\ n_o \alpha_o \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad X_i = \mathcal{R}(S) X_o$$

$$\mathcal{R}(S) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -V & 1 \end{pmatrix} \text{ est la matrice de réfraction du dioptre}$$

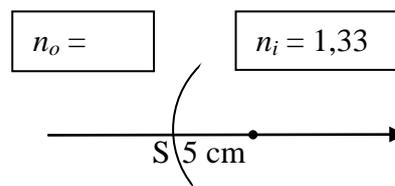
Remarques : $\det \mathcal{R} = 1$, $\mathcal{R}_{21} = -V$
Dioptre plan $\mathcal{R}(\text{plan}) = I$

Exemples :



$$V = \frac{1,5 - 1,33}{-5 \cdot 10^{-2}} = -3,5 \delta$$

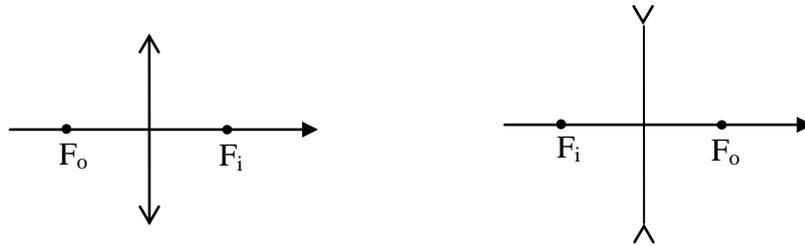
$$\mathcal{R}(S) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3,5 & 1 \end{pmatrix}$$



$$V = \frac{1,33 - 1,5}{5 \cdot 10^{-2}} = -3,5 \delta$$

$$\mathcal{R}(S) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3,5 & 1 \end{pmatrix}$$

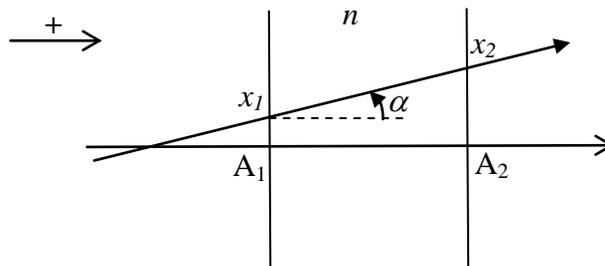
Conséquence : on voit donc que pour des lentilles convergentes et divergentes les foyers objet et image sont inversés, comme le montre l'image ci-dessous



B. Matrice de translation

C'est la matrice de transformation de X entre deux plans de front situés dans un **même milieu homogène**. Elle est indispensable car les systèmes optiques sont généralement des milieux homogènes par morceaux.

On se limite toujours aux rayons méridiens.



$$x_2 = x_1 + \overline{A_1 A_2} \alpha = x_1 + \frac{\overline{A_1 A_2}}{n} n \alpha$$

$$\alpha_1 = \alpha_2 \Rightarrow n \alpha_2 = n \alpha_1$$

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ n \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \overline{A_1 A_2} \\ 0 & n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ n \alpha_1 \end{pmatrix} \Rightarrow X_2 = \mathcal{T}(\overline{A_1 A_2}) X_1$$

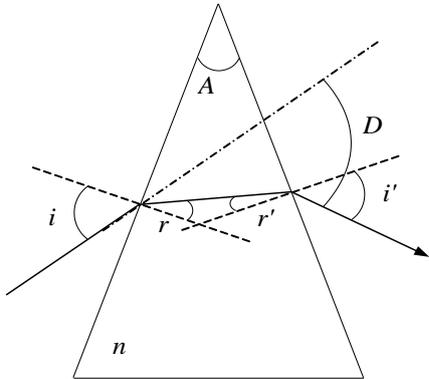
$$\mathcal{T}(\overline{A_1 A_2}) = \begin{pmatrix} 1 & \overline{A_1 A_2} \\ 0 & n \end{pmatrix} \text{ matrice de translation dans le milieu d'indice } n$$

$$\text{Det } \mathcal{T}(\overline{A_1 A_2}) = 1$$

L'approximation de Gauss apparaît comme l'approximation linéaire de l'optique géométrique.

EXERCICES ET PROBLEMES – CHAPITRE 2

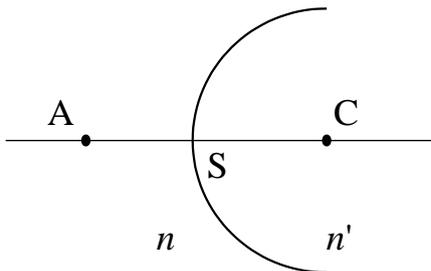
I) Prisme d'angle faible



Etablir l'expression de la déviation angulaire D produite par un prisme d'angle A faible et d'indice n . Calculer D sachant que $A = 2^\circ$ et $n = 1,5$.

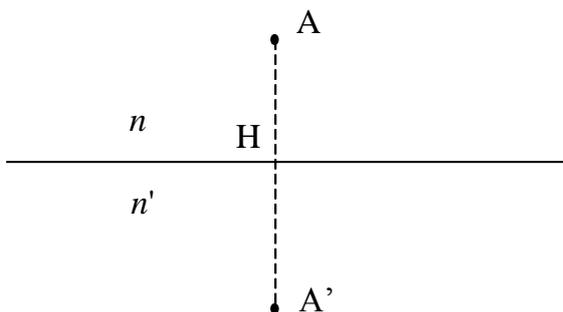
A quelle condition sur l'angle d'incidence, un rayon peut-il émerger du prisme ?

II) Dioptré sphérique dans les conditions de Gauss



Etablir la relation liant la position de l'objet ponctuel \overline{SA} , celle de son image $\overline{SA'}$ dans le cas du dioptré sphérique représenté ci-contre, en fonction de n, n', \overline{SC} , C étant le centre du dioptré. On se placera dans l'hypothèse des rayons paraxiaux.

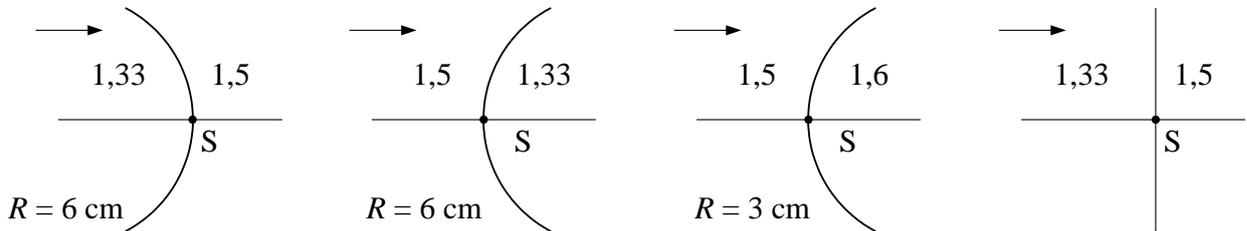
III) Dioptré plan dans les conditions de Gauss



Un dioptré plan est une surface plane séparant deux milieux homogènes et isotropes d'indices n et n' . A étant un objet ponctuel et A' son image à travers le dioptré plan, exprimer la relation entre \overline{HA} et $\overline{HA'}$ dans les conditions de Gauss.

IV) Vergence d'un dioptre

Calculer, en cm^{-1} et en dioptrie, la vergence des différents dioptres représentés ci-dessous. En déduire les distances focales image et objet. Ecrire les matrices de réfraction.



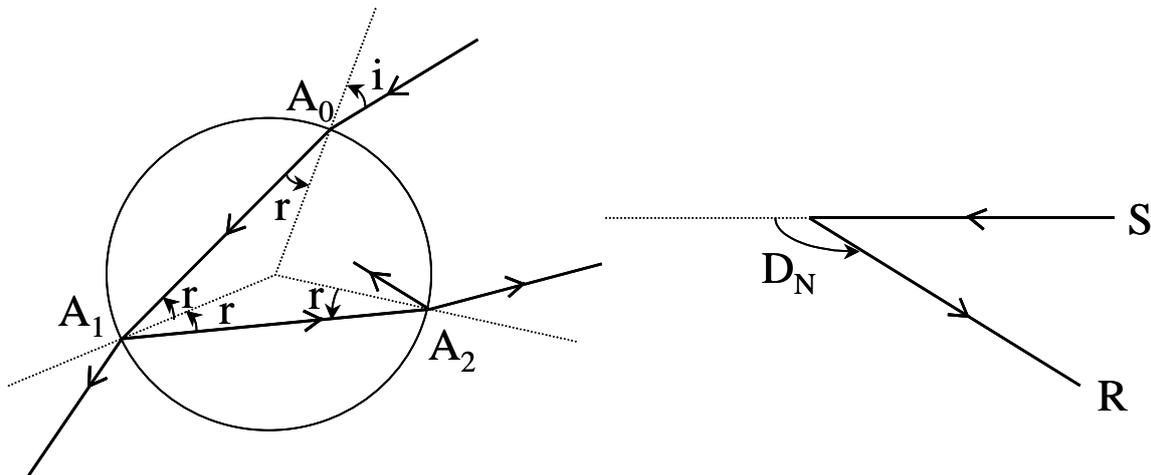
V) Image d'un objet réel donnée par un dioptre convergent

Soit un dioptre sphérique convexe ($R = 2 \text{ cm}$) en matière plastique transparente, d'indice 1,5. Un objet réel de hauteur 1 cm se trouve dans l'air à 10 cm du dioptre.

- Déterminer la vergence V .
- Trouver la position et la taille de l'image donnée par le dioptre et faire une construction géométrique.

VI) Origine des arcs-en-ciel

Une goutte d'eau sphérique d'indice n est éclairée par le soleil, supposé ponctuel et à l'infini. Soit D_N la déviation algébrique totale d'un rayon pénétrant sous l'incidence i et émergeant après N réflexions internes.



- a) Exprimer D_N en fonction de i , r et N ; montrer que pour $i \in \left] 0, \frac{\pi}{2} \right[$, D_N ne peut avoir d'extremum que dans le cas $N \geq 1$ et que, dans ce cas, l'extremum est unique. On

désignera par D_N^m , la valeur extrême de D_N et par i_N^m , la valeur correspondante de i .
Calculer numériquement i_N^m et D_N^m pour $N = 1$ et $N = 2$, en prenant $n = 1,33$.

- b) Lorsque D_N est voisin de D_N^m , il y a accumulation de rayons émergents, donc maximum de luminosité ; on observe l'arc-en-ciel d'ordre N ; si les gouttes de pluie sont uniformément réparties dans l'espace, les gouttes brillantes sont réparties sur un cône et ajoutent leurs effets le long d'une génératrice.
Quel est l'axe du cône? Calculer les demi-angles d'ouverture α_N du cône pour $N = 1$ et $N = 2$ (seuls arcs-en-ciel visibles). Comment la présence du sol peut-elle limiter le phénomène?
- c) On tient compte maintenant de la dispersion. Calculer la dérivée de D_N^m par rapport à n . Calculer numériquement la variation de rayon apparent des arcs-en-ciel d'ordre 1 et 2, entre les couleurs extrêmes, de longueur d'onde 0,8 et 0,4 μm , pour lesquelles on prendra respectivement $n = 1,33 - 5 \cdot 10^{-3}$ et $n = 1,33 + 5 \cdot 10^{-3}$. Faire un schéma indicatif de ce qui est vu par l'observateur, en précisant la succession des couleurs.

VII) Dioptre sphérique dans les conditions de Gauss

A. Méthode algébrique :

Soit un dioptre sphérique de centre C et de sommet S , avec $\overline{SC} = +2 \text{ cm}$, séparant deux milieux d'indice $n_0 = 1$ et $n_i = 1,5$.

- a) Ce dioptre est-il convergent ou divergent?
b) En utilisant la relation de conjugaison, déterminer la position de A_i , image de A_0 , telle que $\overline{SA_0} = -8 \text{ cm}$. Quelle est la nature de l'objet A_0 .
c) Mêmes questions avec $\overline{SA_0} = -2 \text{ cm}$.
d) Déterminer la position des foyers objet et image du dioptre. Placer ces points sur un schéma et faire les constructions correspondant aux questions b) et c). Mesurer les grandissements transversaux G_t .

B. Méthode matricielle :

On reprend le dioptre décrit au A.

- a) Établir la matrice de transfert.
b) Écrire la matrice de conjugaison $T(\overline{A_0 A_i})$, A_i étant l'image de A_0 . En déduire la relation de conjugaison.
Pour $\overline{SA_0} = -8 \text{ cm}$, déduire G_t , grandissement transversal.
c) Déterminer les positions des plans principaux et des points nodaux N_0 et N_i , points conjugués tels que $G_a = 1$ (on déterminera au préalable $T(\overline{H_0 H_i})$ et $T(\overline{N_0 N_i})$).

Chapitre 3

SYSTÈMES CENTRÉS

Les systèmes centrés sont constitués d'une succession de milieux homogènes séparés par des dioptries sphériques, l'ensemble possédant un axe symétrique de révolution. Ils seront caractérisés, dans l'approximation de Gauss par des relations matricielles. Ils présentent alors la propriété caractéristique de la linéarité :

X_e^1 et X_e^2 représentent 2 rayons lumineux à l'entrée

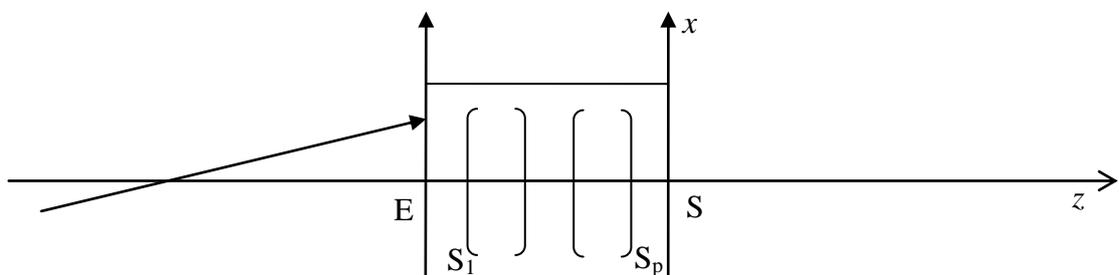
X_s^1 et X_s^2 représentent 2 rayons lumineux à la sortie du système

Toute entrée qui est une combinaison linéaire de X_e^1 et X_e^2 admet une sortie qui est combinaison linéaire de X_s^1 et X_s^2 .

On définira pour ces systèmes des éléments cardinaux : c'est un ensemble de caractéristiques qui suffisent pour déterminer, dans l'approximation de Gauss, la correspondance objet-image fournie par le système.

I. Matrice de transfert du système

1. Position du problème



Il s'agit de trouver le rayon émergent issu de (S_x) correspondant à un rayon incident tombant sur (E_x).

On introduit pour cela la *matrice de transfert* $T(ES)$ du système.

2. Matrice de transfert du système

Les matrices d'entrée et de sortie sont $X_e = \begin{pmatrix} x \\ n\alpha \end{pmatrix}_e$, $X_s = \begin{pmatrix} x \\ n\alpha \end{pmatrix}_s$, on a :

$$X_s = T(ES)X_e$$

Pour déterminer la matrice de transfert on a besoin d'écrire les matrices de tous les « évènements » subits par le rayon lumineux : il s'agit toujours d'une série de translations et de réfractions.

En notant X_{I-} et X_{I+} les matrices pour les plans de front des dioptries situés avant et après eux on a successivement :

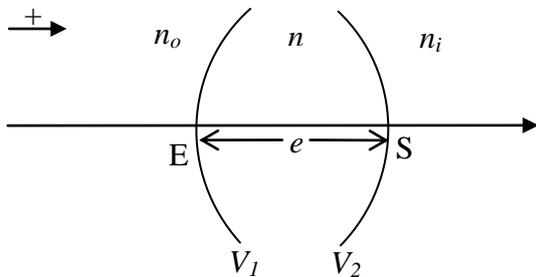
$$X_{I-} = \mathcal{C}(ES_1)X_e \quad X_{I+} = \mathcal{R}(S_1)X_{I-} \quad X_2 = \mathcal{C}(\overline{S_1S_2})X_{I+} \dots X_s = \mathcal{C}(\overline{S_pS})X_{p+}$$

soit finalement:

$$X_s = \underbrace{\mathcal{C}(\overline{S_pS}) \mathcal{R}(S_p) \mathcal{C}(\overline{S_{p-1}S_p}) \mathcal{R}(S_{p-1}) \mathcal{C}(\overline{S_{p-2}S_{p-1}}) \dots \mathcal{C}(\overline{S_1S_2}) \mathcal{R}(S_1) \mathcal{C}(\overline{ES_1})}_{T(\overline{ES})} X_e$$

$T(\overline{ES})$, matrice de transfert du système, apparaît comme le produit des matrices élémentaires \mathcal{C} et \mathcal{R} écrit de droite à gauche en suivant la succession des dioptries atteints par la lumière.

Exemple :



$$T(\overline{ES}) = \mathcal{R}(S) \mathcal{C}(\overline{ES}) \mathcal{R}(E)$$

$$T(\overline{ES}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -V_2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & e \\ 0 & n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -V_1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T(\overline{ES}) = \begin{pmatrix} 1 - V_1 \frac{e}{n} & \frac{e}{n} \\ -\left(V_1 + V_2 - V_1 V_2 \frac{e}{n}\right) & 1 - V_2 \frac{e}{n} \end{pmatrix}$$

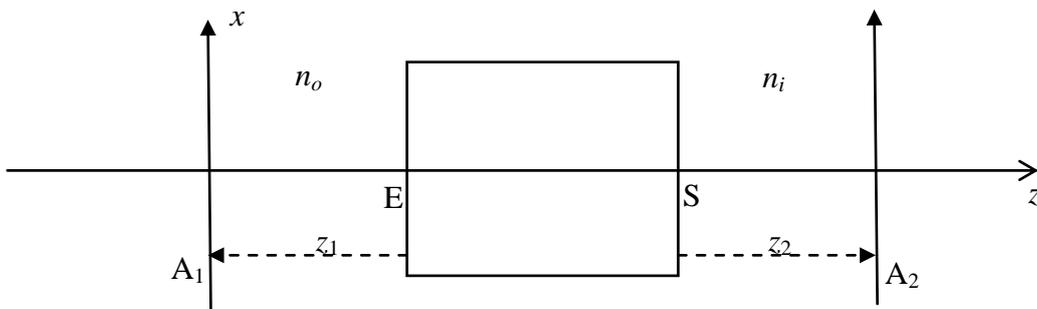
$$T(\overline{ES}) \text{ est une matrice } 2 \times 2 \quad T(\overline{ES}) = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{pmatrix}$$

$$x_s = T_{11}x_e + T_{12}(n\alpha)_e$$

$$(n\alpha)_s = T_{21}x_e + T_{22}(n\alpha)_e$$

$\det T(\overline{ES}) = 1$, car $T(\overline{ES})$ est le produit de matrices dont les déterminants sont tous égaux à 1.

3. Vergence



On exprime la matrice de transfert $T(\overline{A_1 A_2})$ entre 2 plans de fronts quelconques : A_1 dans l'espace objet, A_2 dans l'espace image.

$$T(\overline{A_1 A_2}) = \mathcal{C}(\overline{SA_2}) T(\overline{ES}) \mathcal{C}(\overline{A_1 E})$$

$$T(\overline{A_1 A_2}) = \begin{pmatrix} 1 & z_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -z_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T_{11}(\overline{A_1 A_2}) = T_{11} + T_{12} \frac{z_2}{n_i} \quad T_{12}(\overline{A_1 A_2}) = -T_{11} \frac{z_1}{n_o} + T_{12} + \frac{z_2}{n_i} \left(-T_{21} \frac{z_1}{n_o} + T_{22} \right)$$

$$T_{21}(\overline{A_1 A_2}) = T_{21} \quad T_{22}(\overline{A_1 A_2}) = T_{22} - T_{21} \frac{z_1}{n_o}$$

seul $T_{21}(\overline{A_1 A_2})$ est indépendant du couple $A_1 A_2$ choisi. C'est donc une caractéristique du système centré. On appelle vergence du système l'opposé de T_{21} .

$$V = -T_{21}$$

Dans l'exemple ci-dessus on a : $V = V_1 + V_2 - V_1 V_2 \frac{e}{n}$

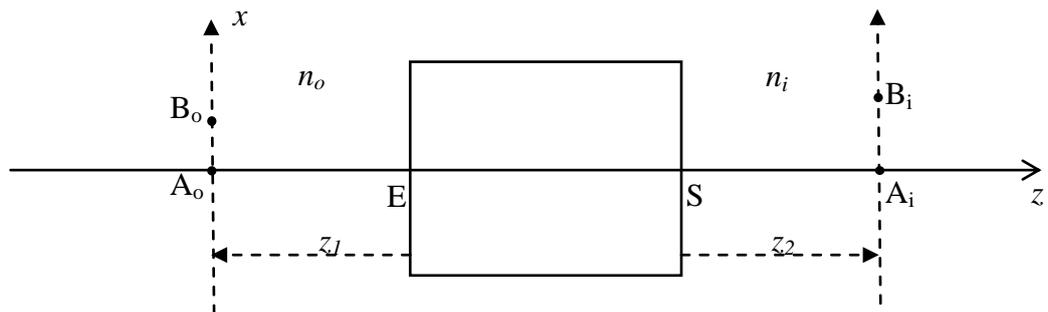
Si la vergence est positive le système est dit convergent, si elle est négative le système est divergent.

4. Matrice de conjugaison

C'est la forme particulière que prend la matrice de transfert lorsque les points A_1 et A_2 sont conjugués l'un de l'autre. Soient A_o et A_i de tels points.

$$x_i = T_{11}(\overline{A_1 A_2}) x_o + T_{12}(\overline{A_1 A_2}) n_o \alpha_o$$

$$n_i \alpha_i = T_{21}(\overline{A_1 A_2}) x_o + T_{22}(\overline{A_1 A_2}) n_o \alpha_o$$



La position x_i d'un point B_i dans le plan de front passant par A_i ne doit pas dépendre de α_o , B_i est alors l'image de B_o d'abscisse x_o : ceci est imposé par l'aplanétisme supposé du système.

On a donc $T_{12}(\overline{A_o A_i}) = 0 \Rightarrow T_{11}(\overline{A_o A_i}) = \frac{x_i}{x_o} = G_t$, où G_t est le grandissement transversal

$$T_{22}(\overline{A_o A_i}) = \left. \frac{n_i \alpha_i}{n_o \alpha_o} \right|_{x_o=0} = \frac{n_i}{n_o} G_a, \text{ où } G_a \text{ est le grandissement angulaire}$$

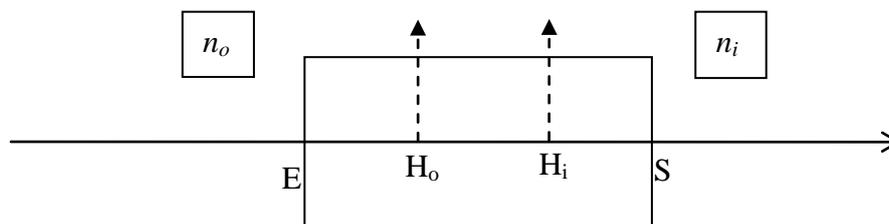
finalement : $T(\overline{A_o A_i}) = \begin{pmatrix} G_t & 0 \\ -V & \frac{n_i}{n_o} G_a \end{pmatrix}$ forme générale de la matrice de conjugaison

$\det T(\overline{A_o A_i}) = 1$ on a donc $\frac{n_i}{n_o} G_t G_a = 1$

II. Éléments cardinaux

A. Plan principaux

Ce sont les plans de front conjugués tels que le grandissement transversal est égal à 1.



Il résulte de ce qui précède que la nature de la matrice de transfert entre plans principaux se met sous la forme suivante :

$$T(\overline{H_o H_i}) = T(H) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -V & 1 \end{pmatrix}$$

En utilisant la matrice de transfert on peut alors déterminer les distances $\overline{EH_o}$ et $\overline{SH_i}$:

$$\overline{H_o H_i} = \overline{H_o E} + \overline{ES} + \overline{SH_i}$$

$$T(\overline{H_o H_i}) = \mathcal{C}(\overline{SH_i}) T(\overline{ES}) \mathcal{C}(\overline{H_o E})$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & \overline{SH_i} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ -V & T_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \overline{H_o E} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\overline{SH_i} = \frac{n_i}{V} (T_{11} - 1) = f_i (T_{11} - 1)$$

$$\overline{EH_o} = -\frac{n_o}{V} (T_{22} - 1) = f_o (T_{22} - 1)$$

B. Plans focaux

Ce sont deux plans de front $F_o x$ dans l'espace objet, $F_i x$ dans l'espace image, tels que :

Tout rayon incident, issu de F_o émerge parallèlement à l'axe optique

Tout rayon incident parallèle à l'axe optique, émerge en passant par F_i

1. Foyers objet F_o

Pour situer F_o on explicite $X_s = T(ES)X_e$

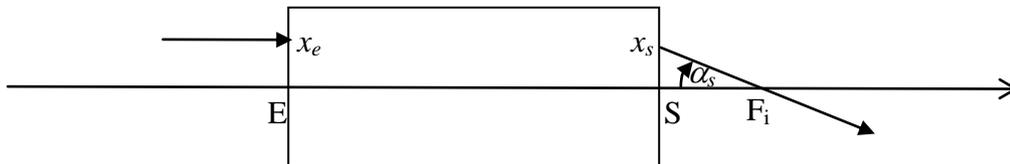


$$x_s = T_{11}x_e + T_{12}n_o\alpha_e$$

$$n_i \alpha_s = -V_1x_e + T_{22}n_o\alpha_e \quad \text{or } \alpha_s = 0 \quad \forall x_e \quad \text{d'où } \overline{EF_o} = \frac{x_e}{\alpha_e} = -\frac{n_o}{V}T_{22}$$

$$\text{donc } \overline{EF_o} = f_o T_{22} \quad \text{soit encore } \overline{H_o F_o} = \overline{H_o E} + \overline{EF_o} = f_o$$

2. Foyer image F_i



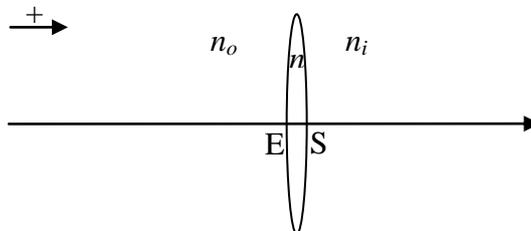
$$\alpha_e = 0 \quad \forall x_e \quad \text{donc :}$$

$$x_s = T_{11}x_e \quad \text{d'où :}$$

$$n_i \alpha_s = -Vx_e \quad \text{or } \alpha_s = \frac{x_s}{F_i S} \quad \text{d'où}$$

$$\overline{SF_i} = f_i T_{11} \quad \text{soit encore } \overline{H_i F_i} = \overline{H_i E} + \overline{EF_i} = f_i$$

C. Exemple : la lentille mince, détermination des éléments cardinaux d'une lentille dont on peut négliger l'épaisseur



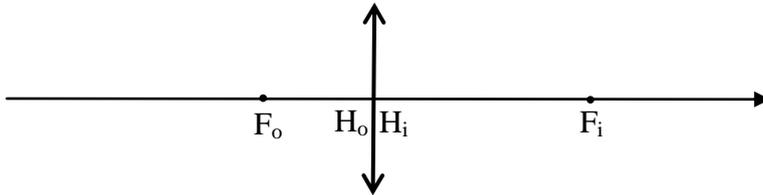
$$T(\overline{ES}) = \mathcal{R}(S)\mathcal{R}(E) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -V_2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -V_1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -(V_1 + V_2) & 1 \end{pmatrix}$$

$$V = V_1 + V_2 \quad \text{avec } V_1 = (n - n_o)/R_1 \quad \text{et } V_2 = (n_i - n)/R_2$$

Optique géométrique - Interférences - Diffraction
Yann VAILLS (e-mail : Yann.Vaills@univ-orleans.fr)

$$\left. \begin{array}{l} T_{11} = 1 \Rightarrow \overline{SH_i} = 0 \\ T_{22} = 1 \Rightarrow \overline{EH_o} = 0 \end{array} \right\} \text{ les plans principaux sont confondus avec le plan de la lentille}$$

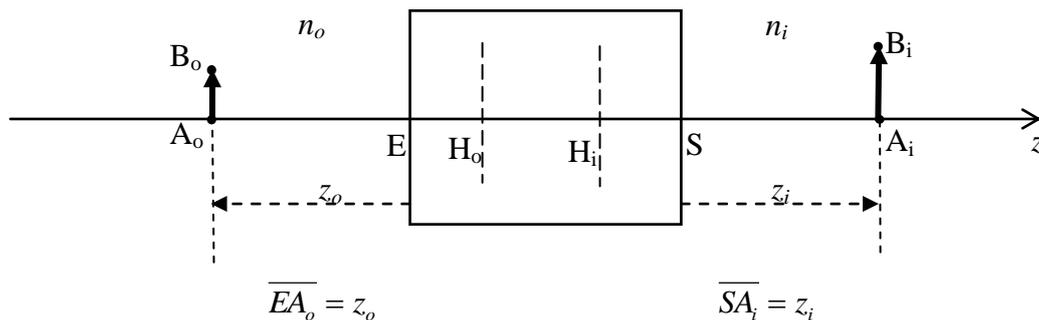
$$\overline{H_o F_o} = f_o = -\frac{n_o}{V} \quad \overline{H_i F_i} = f_i = \frac{n_i}{V}$$



Dans le cas de la lentille dans l'air, $n_o = n_i$ $\overline{H_o F_o} = -\overline{H_i F_i}$

III. Détermination de l'image d'un objet

Un système centré est caractérisé par une matrice de transfert $T(\overline{ES})$ qui permet de déterminer les éléments cardinaux. Nous allons montrer tout l'intérêt de ces derniers dans la détermination de l'image que donne le système de l'objet.



A. Relation de conjugaison

Il s'agit d'établir une relation entre z_i et z_o . Celle-ci s'obtient à l'aide de $T(\overline{ES})$ et $T(\overline{A_o A_i})$

$$T(\overline{A_o A_i}) = \mathcal{C}(\overline{SA_i}) T(\overline{ES}) \mathcal{C}(\overline{A_o E})$$

$$T(A) = \begin{pmatrix} 1 & z_i/n_i \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -z_o/n_o \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T_{12}(A) = T_{12} - T_{11} \frac{z_o}{n_o} + \frac{z_i}{n_i} \left(T_{22} - T_{21} \frac{z_o}{n_o} \right) = 0 \text{ car } A_o \text{ et } A_i \text{ sont conjugués}$$

$$\text{d'où la relation } \frac{z_i}{n_i} = \frac{T_{11} \frac{z_o}{n_o} - T_{12}}{V \frac{z_o}{n_o} + T_{22}}$$

1. En choisissant pour plans d'entrée et de sortie les plans principaux

$$T_{11} = G_t = 1, T_{22} = G_a n_i / n_o = G_t^{-1} = 1, T_{12} = 0$$

En posant $z_o = \overline{H_o A_o} = p_o$ et $z_i = \overline{H_i A_i} = p_i$ il vient :

$$\boxed{-\frac{n_o}{p_o} + \frac{n_i}{p_i} = V} \text{ formule de conjugaison de Descartes}$$

ou, sous d'autres formes intéressantes :

$$\boxed{-\frac{n_o}{p_o} + \frac{n_i}{p_i} = \frac{n_i}{f_i}} \quad \text{et} \quad \frac{f_o}{p_o} + \frac{f_i}{p_i} = 1$$

lorsque les milieux sont identiques on retrouve :

$$\boxed{-\frac{1}{p_o} + \frac{1}{p_i} = \frac{1}{f_i}}$$

Remarque importante :

Les matrices de translation sont relatives aux milieux d'entrée et de sortie. Le calcul précédent met en lumière le fait que le système centré est remplacé par le système centré compris entre les plans principaux.

$$T(\overline{A_o A_i}) = \mathcal{C}(\overline{H_i A_i}) T(\overline{H_o H_i}) \mathcal{C}(\overline{A_o H_o})$$

Grandissement transversal :

$$T_{11}(A) = G_t = 1 - \frac{V p_i}{n_i} \quad \text{soit avec la relation de conjugaison}$$

$$G_t = \frac{n_o}{n_i} \frac{p_i}{p_o}$$

Grandissement angulaire :

$$T_{22}(A) = \frac{n_i}{n_o} G_a = G_t^{-1} \quad \text{d'où } G_a = \frac{p_o}{p_i}$$

2. En choisissant pour plans d'entrée et de sortie les plans focaux

La matrice de transfert entre foyers a pour expression :

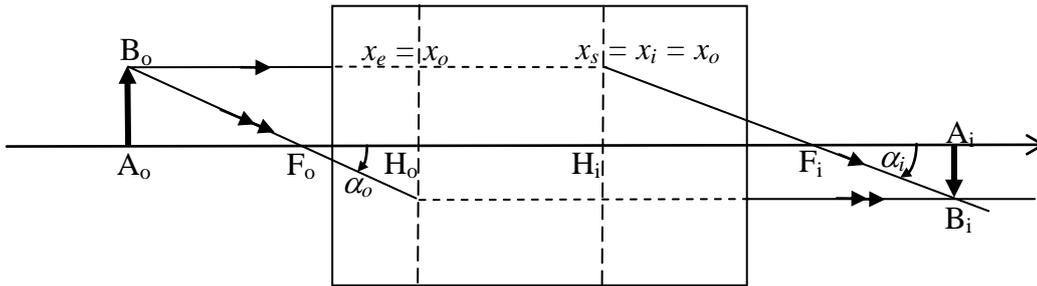
$$T(\overline{F_o F_i}) = \begin{pmatrix} 0 & V^{-1} \\ -V & 0 \end{pmatrix}$$

B. Constructions géométriques

On choisira généralement de faire les schémas optiques en utilisant les propriétés des plans principaux et focaux. Dans ce cas la matrice de transfert entre l'entrée et la sortie du système

est la matrice de transfert entre les plans principaux. $T(\overline{ES}) = T(\overline{H_o H_i}) = T(H) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -V & 1 \end{pmatrix}$

1. Image d'un objet situé dans le plan de front



On choisit de tracer deux rayons lumineux passant par l'extrémité B_o de l'objet, l'un arrivant parallèlement à l'axe optique, l'autre passant par le foyer objet du système.

Rayon horizontal :

$$\begin{pmatrix} x_i \\ n_i \alpha_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -V & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_o \\ n_o \alpha_o = 0 \end{pmatrix} \text{ on a donc : } \begin{matrix} x_i = x_o \\ n_i \alpha_i = -V x_o \end{matrix}, \text{ soit } -\frac{n_i}{f_i} x_o = n_i \alpha_i$$

d'où $\alpha_i = -\frac{x_o}{f_i}$ ce qui implique que le rayon sortant passe par le foyer image du système.

Rayon passant par B_o et F_o :

$$\begin{pmatrix} x_i \\ n_i \alpha_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -V & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_o \\ n_o \alpha_o \end{pmatrix} \text{ donc : } n_i \alpha_i = -V x_o + n_o \alpha_o$$

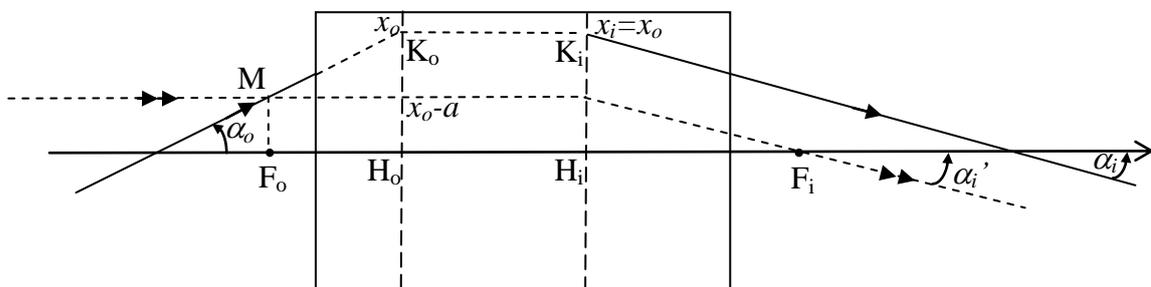
Or on a cette fois : $x_o = -\alpha_o f_o$

$$\text{donc : } n_i \alpha_i = -V x_o + n_o \alpha_o = V \alpha_o f_o + n_o \alpha_o = -\frac{n_o}{f_o} \alpha_o f_o + n_o \alpha_o = 0$$

ce qui signifie que le rayon sortant est horizontal.

L'intersection des deux rayons sortant donne la position du point B_i , image de B_o .

2. Construction d'un rayon émergent correspondant à un rayon incident donné



Soit un rayon lumineux arrivant sous une incidence quelconque α_o sur le système, et ressortant sous un angle α_i . On peut écrire :

$$\begin{pmatrix} x_i \\ n_i \alpha_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -V & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_o \\ n_o \alpha_o \end{pmatrix} \text{ on a donc : } \begin{matrix} x_i = x_o \\ n_i \alpha_i = -V x_o + \alpha_o n_o = -\frac{n_i}{f_i} x_o - \frac{a}{f_o} n_o = -\frac{n_i}{f_i} x_o + \frac{a}{f_i} n_i \end{matrix}$$

Considérons un deuxième rayon lumineux qui arrive horizontalement sur le système, et croise le premier rayon au point M dans le plan focal objet du système à la cote $x_o - a$. On a alors :

$$\begin{pmatrix} x_i - a \\ n_i \alpha_i' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -V & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_o - a \\ n_o \alpha_o = 0 \end{pmatrix}, \text{ soit : } n_i \alpha_i' = -V(x_o - a) = -n_i \frac{(x_o - a)}{f_i} = n_i \alpha_i$$

Donc $\alpha_i = \alpha_i'$, ce qui signifie que les deux rayons sortants sont parallèles, et que le deuxième rayon coupe l'axe optique en F_i , foyer image du système.

IV. Exemples d'applications : les lentilles

C'est un ensemble de deux dioptries sphériques qui délimitent un milieu homogène d'indice n . On supposera que le milieu extérieur est l'air ($n_o = n_i = 1$)

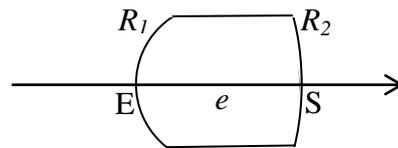
A. Lentilles épaisses

1. Matrice de transfert

$$T(\overline{ES}) = \begin{pmatrix} 1 - V_1 \frac{e}{n} & \frac{e}{n} \\ -V & 1 - V_2 \frac{e}{n} \end{pmatrix}$$

$$\text{où } V_1 = \frac{n-1}{R_1}, V_2 = \frac{1-n}{R_2}$$

$$\text{et } \boxed{V = V_1 + V_2 - V_1 V_2 \frac{e}{n}}$$



2. Éléments cardinaux

$$V_1 + V_2 - V_1 V_2 \frac{e}{n} = (n-1) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} + \frac{n-1}{n} \frac{e}{R_1 R_2} \right)$$

La vergence est intrinsèque, elle est indépendante du sens de la lumière, la focale de la lentille est donc : $f_i = 1/V = -f_o$

Plans principaux :

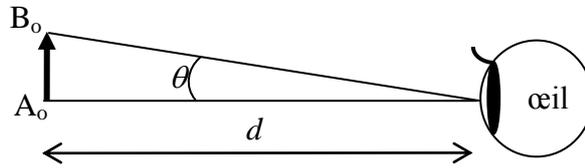
$$\overline{SH_i} = f_i (T_{11} - 1) = -\frac{e V_1}{n V}$$

$$\overline{EH_o} = f_o (T_{22} - 1) = \frac{e V_2}{n V}$$

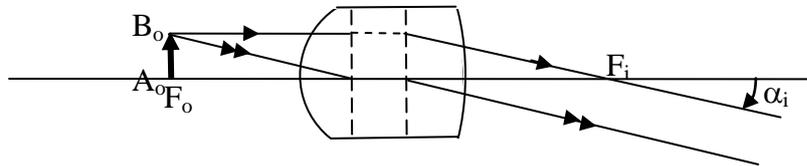
B. La loupe

C'est un instrument de faible focale qu'un observateur place de telle sorte qu'il observe une image à l'infini.

Sans loupe :



avec loupe :



Le grossissement est caractérisé par le rapport $G = \frac{|\alpha_i|}{\theta} = \frac{d}{f}$

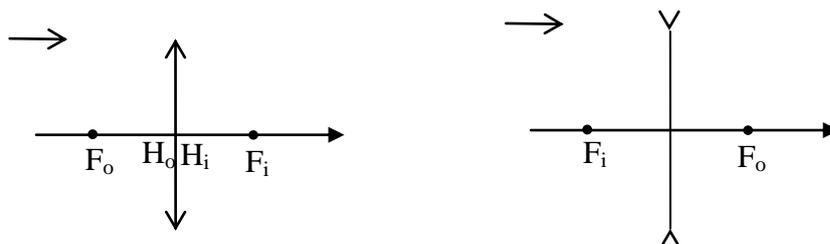
C. Lentilles minces

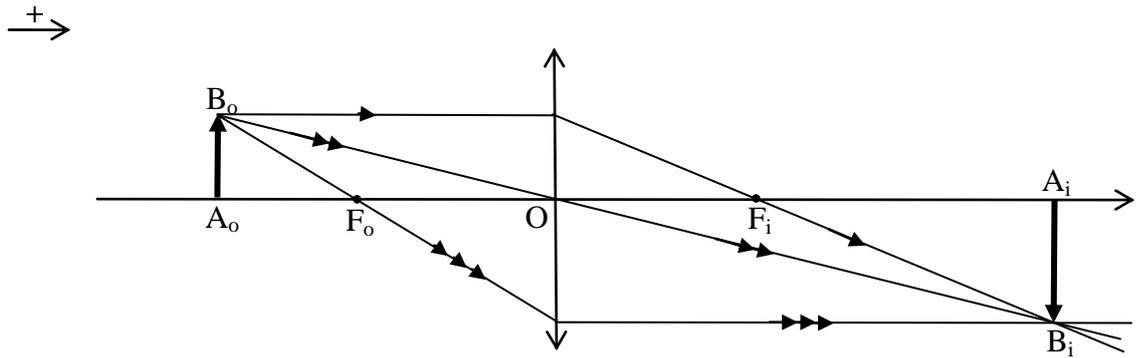
C'est le cas où $e \approx 0$, $V = V_1 + V_2 = (n-1) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$

1. Constructions géométriques

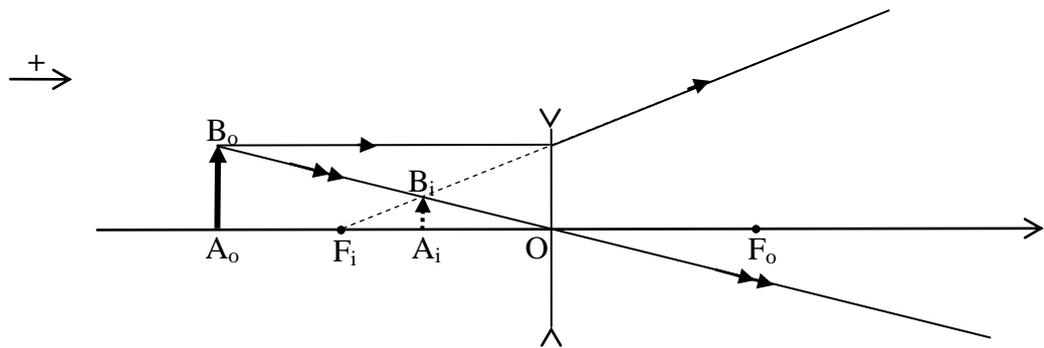
Elle résulte de la remarque suivante : les plans principaux sont confondus avec celui de la lentille : $\overline{SH_i} = \overline{EH_o} = 0$

Suivant le signe de la vergence deux cas peuvent se présenter :





En pratique la construction d'effectue avec deux des trois rayons tracés :



Remarque : le rayon B_0OB_i ne subit pas de déviation

$$T(O) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -V & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} x \\ n\alpha \end{pmatrix}_S = T(O) \begin{pmatrix} x \\ n\alpha \end{pmatrix}_E$$

$$\alpha_i = -Vx + \alpha_o \quad \text{en } x = 0 \quad \alpha_i = \alpha_o$$

2. Relations de conjugaison

Pour une lentille mince dont les milieux objet et image ont même indice on a :

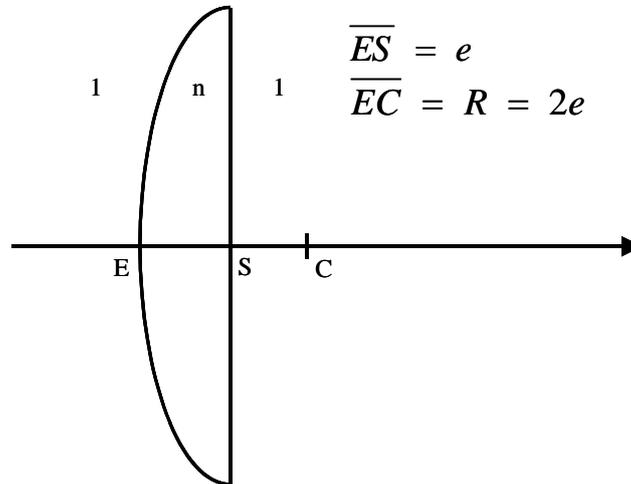
Descartes $\frac{1}{p_i} - \frac{1}{p_o} = \frac{1}{f}$ et $G_t = \frac{p_i}{p_o}$

Newton $\sigma_o \sigma_i = -f^2$ et $G_t = -\frac{\sigma_i}{f_i}$ avec $\sigma_o = \overline{F_o A_o}$ et $\sigma_i = \overline{F_i A_i}$

EXERCICES ET PROBLEMES – CHAPITRE 3

I) Exercice préliminaire : association de dioptries

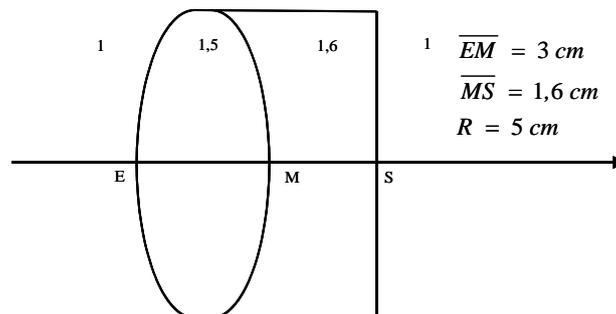
1) Écrire la matrice de transfert du système suivant :



- 2) Trouver la position des éléments cardinaux.
- 3) A.N.: $e = 2 \text{ cm}$, $n = 1,5$. Compléter le schéma.

II) Objectif d'une lunette astronomique

Les caractéristiques géométriques de l'objectif d'une petite lunette astronomique sont portées sur le schéma de la figure ci-dessous. Les indices des verres sont 1,5 pour le premier rencontré et 1,6 pour le second. R représente le rayon de courbure des dioptries sphériques. L'ensemble est dans l'air.



- 1) Déterminer les éléments cardinaux de l'objectif.
- 2) A quelle distance de la face de sortie de l'objectif se forme l'image d'un objet situé à l'infini ? Cet objet a un diamètre apparent égal à $1'$. Quel est le diamètre de son image ? faire la construction géométrique.

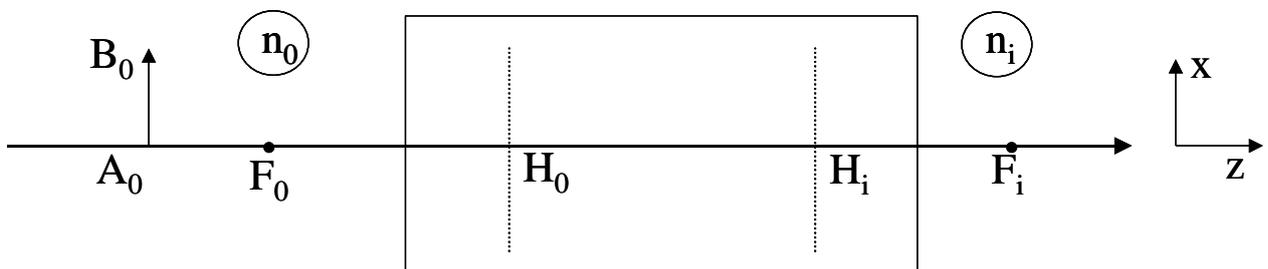
III) Lentille

Une lentille d'épaisseur $e = \overline{ES}$, constituée d'un matériau d'indice n , est en contact d'un côté avec l'air, d'indice $n_0 = 1$, et de l'autre avec un milieu d'indice $n_i = N$. Elle est formée de deux dioptries sphériques de vergence V_1 et V_2 .

- 1) Déterminer la matrice de transfert $T(\overline{ES})$ entre l'entrée E et la sortie S du système.
- 2) Déterminer $T(\overline{ES})$ quand e tend vers zéro. Déterminer les éléments cardinaux du système.
- 3) Cette lentille mince est formée de deux dioptries sphériques de centre C_1 et C_2 et tels que $\overline{EC_1} = +R$ et $\overline{SC_2} = -2R$, avec R positif. Elle est constituée d'un matériau d'indice $n = 1,5$ et est utilisée dans l'air. Calculer R pour que la distance focale image soit $f_i = +6 \text{ cm}$.
- 4) On désire former avec la lentille mince précédente (L) l'image d'un objet réel AB sur un écran situé à une distance D de l'objet.
 - Exprimer la distance D en fonction de f_i et de la distance d de la lentille L à l'écran.
 - Exprimer de même la distance minimale D_m de l'objet à l'écran.
 - Faire une construction illustrant l'objet AB et son image sur l'écran.

IV) Constructions géométriques

- 1) Pour construire l'image d'un objet on peut remplacer le système optique considéré par ses plans principaux et ses foyers.



- a) Soit V la vergence d'un tel système. Exprimer la matrice de transfert entre les plans principaux de ce système. Donner les coordonnées à l'entrée du système d'un rayon lumineux issu de B_0 et de direction parallèle à l'axe optique. Déterminer les coordonnées x_i et α_i du rayon émergent lui correspondant, en fonction de x_0 et f_i . Construire ce rayon.
- b) Donner les coordonnées d'un rayon lumineux issu de B_0 et passant par F_0 , ainsi que les coordonnées du rayon émergent lui correspondant. Construire ces rayons.
- c) Construire l'image d'un objet A_0B_0 perpendiculaire à l'axe optique en utilisant les plans principaux et les foyers.
- d) Soit une lentille demi-boule, d'épaisseur $e = 2,5 \text{ cm}$ et constituée d'un matériau d'indice $n = 1,5$. Trouver les éléments cardinaux et construire graphiquement l'image d'un objet situé à 5 cm en avant de la face d'entrée plane et ayant une hauteur de 1 cm . Déterminer graphiquement le grandissement angulaire G_a .

Contrôler ces résultats en les retrouvant par le calcul matriciel (on établira pour cela la matrice de transfert entre A_0 et A_i).

- 2) Soit un rayon lumineux (1) arrivant sur un système optique S sous une incidence quelconque α_0 . Soit un second rayon lumineux (2) se propageant parallèlement à l'axe optique et croisant (1) dans le plan focal objet du système.

Montrer que les rayons (1) et (2) ressortent du système sous la même incidence α_i .

Faire des schémas dans le cas (a) d'un système convergent et (b) d'un système divergent.

En déduire le trajet d'un rayon lumineux arrivant sur une lentille mince sous incidence quelconque à $x_0 \neq 0$.

V) Miroirs

- 1) Soit un miroir concave de rayon $\overline{S_1C_1} = -10$ cm. Déterminer par le calcul puis par la méthode graphique la position A_i de l'image d'un objet A_0 pour les cas suivants :

i) $\overline{SA_0} = -\infty$; ii) $\overline{SA_0} = -11$ cm ; iii) $\overline{SA_0} = -3$ cm .

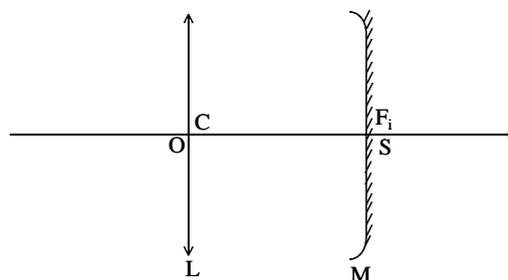
Mêmes questions pour un miroir convexe de rayon $\overline{S_2C_2} = +5$ cm :

i) $\overline{SA_0} = -\infty$; ii) $\overline{SA_0} = -4$ cm ; iii) $\overline{SA_0} = -1$ cm .

- 2) Un système centré est constitué d'une lentille mince plan convexe dont la face plane est argentée. Le rayon de courbure du dioptré sphérique est 10 cm. L'indice du verre de la lentille est $n = 1,5$.

Montrer que le système est équivalent à un miroir. Donner ses caractéristiques (position, forme, rayon de courbure...).

- 3) Un système catadioptrique dans l'air est constitué d'une lentille mince convergente L et d'un miroir sphérique concave M. Le foyer image de la lentille, F_i , est confondu avec le sommet S du miroir, tandis que le centre de courbure C du miroir est situé au centre optique O de L.

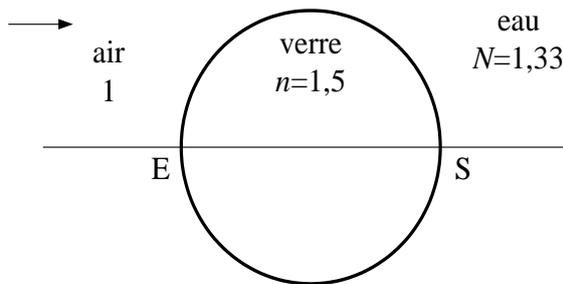


- a) Calculer la matrice de transfert $T(\overline{OO})$ du système pour une entrée-sortie s'effectuant en O. Montrer, par le tracé du trajet d'un rayon incident parallèle à l'axe optique, que l'on pouvait déterminer immédiatement la vergence de ce système.

- b) Dédurre des calculs précédents les caractéristiques (position, grandeur) de l'image d'un petit objet AB situé dans le plan de front situé au voisinage immédiat de O.
- c) Que signifie la valeur trouvée pour le grandissement angulaire ?

Faire un schéma montrant le trajet suivi par un rayon incident non parallèle à l'axe optique du système.

VI) Lentille boule avec milieux différents



On considère une boule de verre d'indice n et de rayon r . La partie gauche de la boule est dans l'air, sa partie droite dans l'eau (indice N).

1) Déterminer, en fonction de r , n et N , la matrice de transfert.

Application numérique : $r = 1$ cm, $n = 1.5$, $N = 1.33$.

$= 1,33$.

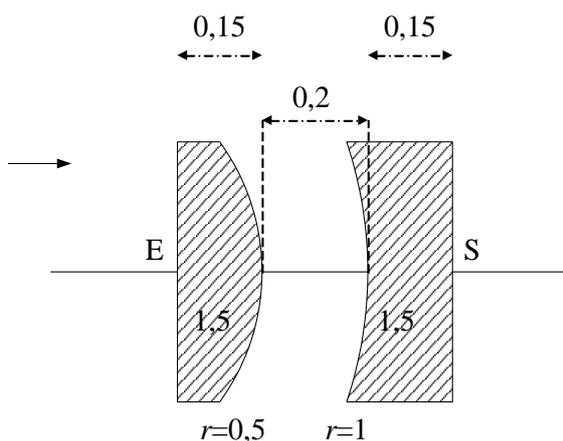
cardinaux.

En déduire la position des éléments

2) Déterminer algébriquement et géométriquement la position de l'image d'un objet situé en E. Quel est le grandissement ?

3) Déterminer algébriquement et géométriquement la position et la taille de l'image d'un objet de hauteur 1 cm situé en à 6 cm de E.

VII) Association de deux lentilles épaisses



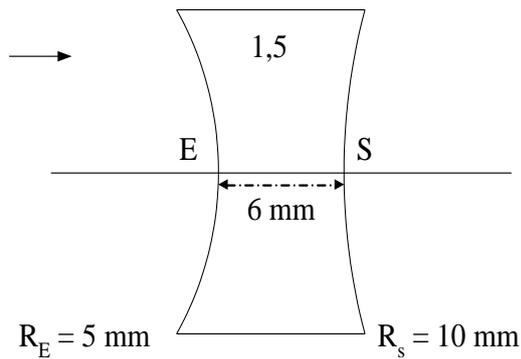
1. Quelle est la matrice de transfert du système centré représenté sur la figure ci-contre ? (les longueurs sont en m) En déduire la position des éléments cardinaux.

2. Construire à l'aide de la matrice de transfert le rayon émergent correspondant au rayon incident incliné sur l'axe optique de l'angle $\alpha = 2,86$ degrés, et passant par le point du plan d'entrée de coordonnées (5 cm, 0).

3. Où se forme l'image d'un point situé contre la face d'entrée ?

4. Déterminer les caractéristiques (position et taille) de l'image d'un objet de hauteur 5 cm situé à 10 cm de E.

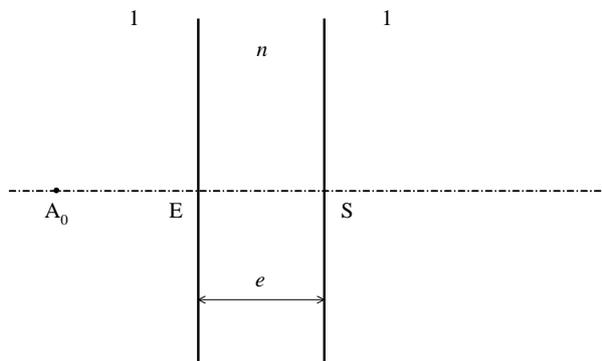
VIII) Lentille épaisse biconcave



On considère une lentille épaisse biconcave placée dans l'air (voir figure ci-contre).

- 1) Quelle est la matrice de transfert de la lentille ? La lentille est-elle convergente ou divergente ?
- 2) Déterminer la position des éléments cardinaux.
- 3) Déterminer algébriquement et géométriquement la position et la taille de l'image d'un objet de hauteur 1 mm situé à 6 mm de E ($\overline{EA_0} = -6 \text{ mm}$).

IX) lame à faces parallèles



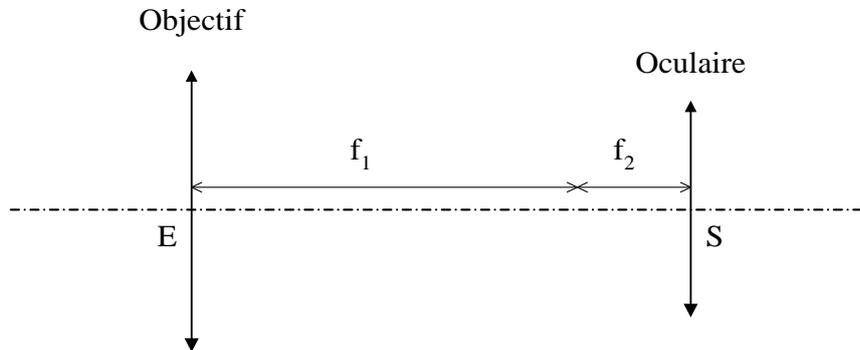
Une lame à faces parallèles d'épaisseur e et d'indice n est plongée dans l'air.

- 1) Exprimer la matrice de transfert $T(\overline{A_0 A_i})$ entre les points conjugués objet et image.
- 2) Calculer la distance $\overline{A_0 A_i}$ en fonction de l'épaisseur e et de l'indice n . On utilisera le fait que $T_{12}(\overline{A_0 A_i}) = 0$.

- 3) Déterminer le déplacement transversal d'un rayon lumineux.

X) Lunette astronomique de Meudon.

La lunette de Meudon, en France, est schématisée par deux lentilles minces convergentes : l'objectif de focale $f_1 = 16$ m et l'oculaire de focale $f_2 = 4$ cm. La distance e entre les 2 lentilles est égale à $f_1 + f_2$.



d'un point situé à l'infini.

- 1) Déterminer la matrice de transfert de la lunette.
- 2) Dessiner la marche d'un faisceau lumineux issu d'un point situé à l'infini.
- 3) Quel est le grossissement ?
- 4) A l'aide de la lunette on observe l'étoile α du Centaure dont le diamètre apparent est $0,002''$. Montrer que cette étoile vue à travers la lunette apparaît comme ponctuelle (la limite de résolution angulaire de l'œil vaut $1,5'$).
Quel est donc l'intérêt de l'instrument ?
Quelle devrait être la focale de l'objectif si l'on souhaitait voir l'étoile α du Centaure sous un angle de $1,5'$ à travers la lunette ?

L'ŒIL

L'œil forme sur la rétine une image des objets regardés : c'est un instrument d'optique (très complexe) dont il faut connaître les caractéristiques pour :

- Corriger les défauts
- Faire un bon choix des autres instruments qu'on lui associe

(voir *Sciences et vie Junior*, Dossier hors série n°51, Janvier 2003)

I. Description sommaire

La cornée : transparente d'indice $n = 1,3771$, dont les rayons de courbure antérieur et postérieur sont 7,8 mm et 6,5 mm. C'est la principale lentille de l'œil dont elle assure 80% de la réfraction. Privée de vaisseaux (sinon notre vision serait troublée par leur ombre), elle est nourrie par un liquide fluide comme l'eau : l'humeur vitreuse

L'iris : muscle en forme d'anneau qui fait varier l'ouverture de la pupille (entre 2,5 et 7 mm). C'est un diaphragme.

Le cristallin : lentille élastique biconvexe d'indice moyen $\bar{n} = 1,42$. Elle se déforme sous l'action du muscle ciliaire

Le corps vitré : liquide gélatineux d'indice $n = 1,336$

La rétine : membrane sensible aux radiations lumineuses. C'est une structure discontinue formée de cellules coniques de diamètre 4 μm .

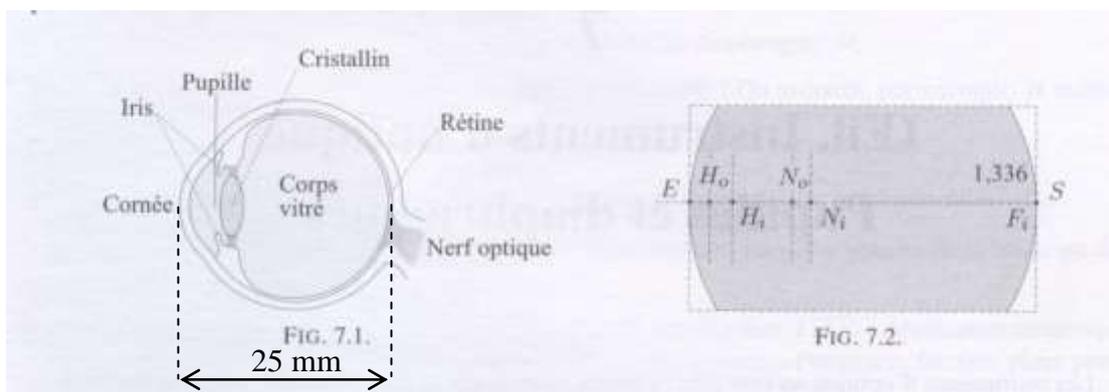


figure d'après Perez

II. Eléments cardinaux

$$T(\overline{ES}) = \begin{pmatrix} 0 & 1,67 \cdot 10^{-2} \\ -60 & 0,9 \end{pmatrix} \quad V = 60 \delta \quad f_i = \frac{n_i}{V} = \frac{1,336}{60} = 2,23 \cdot 10^{-2} m$$
$$f_o = -\frac{n_o}{V} = \frac{1}{60} = -1,67 \cdot 10^{-2} m$$

Ces caractéristiques sont celles de l'œil normal (foyer image sur la rétine) : il n'accommode pas. Lorsque l'accommodation est maximum on a une distance minimale de vision distincte : $d \cong 25 \text{ cm}$.

III. Caractéristiques de l'œil

Champ de l'œil :

- En position fixe : 45° (limites de la fovéa, zone ultrasensible sur l'axe exact de l'œil)
- Grâce à sa mobilité : 40 à 50°

Limite de résolution :

L'œil distingue deux points dont les images sont sur deux cellules distinctes, l'espace entre deux cellules étant au minimum $\delta = 4 \mu\text{m}$, la limite de résolution angulaire est donc $\theta = \delta/R$, où R est à peu de chose près le rayon de l'œil, $\theta \cong 3 \cdot 10^{-4} \text{ rd} = 1'$

L'œil n'est pas un simple instrument d'optique, interviennent dans son fonctionnement :

- Des aspects instinctifs (vision binoculaire du relief, renversement des images)
- Des éléments psychologiques (illusions d'optiques)

IV. Les défauts de l'œil

Les défauts les plus répandus sont la myopie, l'hypermétropie voir figure ci-dessous, la presbytie et l'astigmatisme.

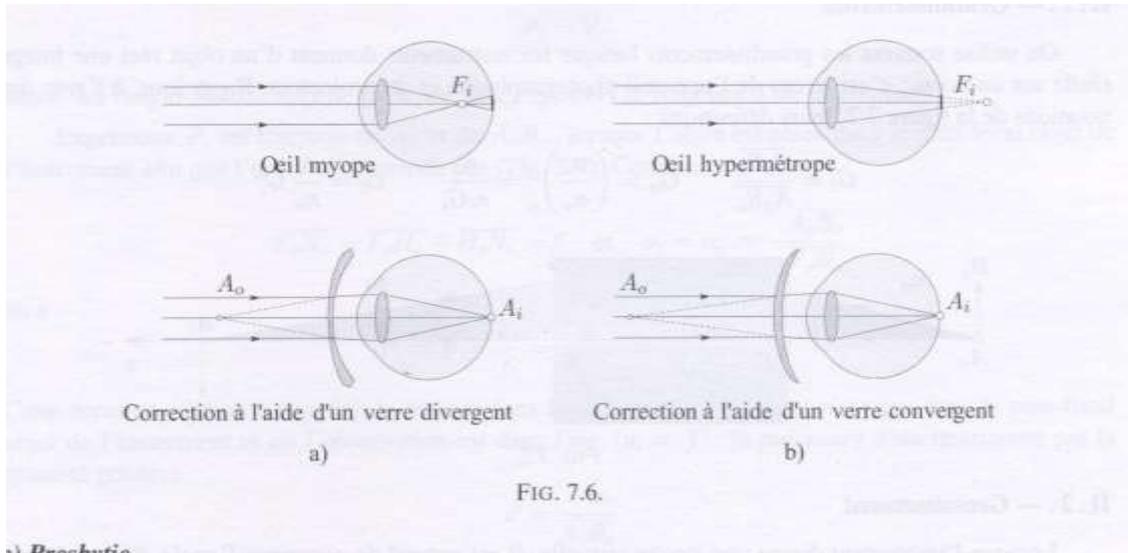


figure d'après Perez

Myopie : l'œil est trop allongé horizontalement, en conséquence l'image d'un point à l'infini se forme avant la rétine. On corrige ce défaut à l'aide de verres ou de lentilles cornéennes divergents.

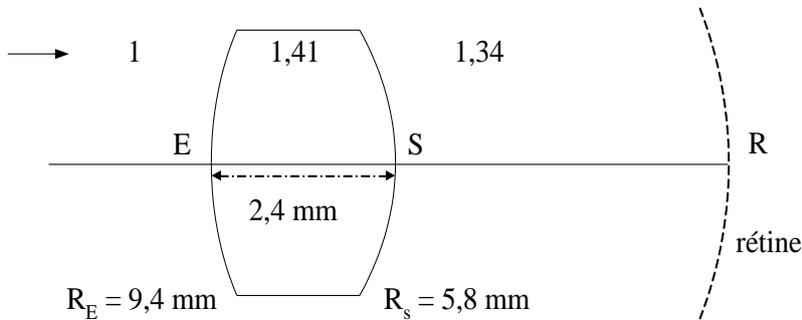
Hypermétropie : c'est le défaut « inverse » de la myopie. L'image d'un point à l'infini se forme après la rétine. On corrige donc ce défaut à l'aide de verres ou de lentilles cornéennes convergents.

Presbytie : c'est le défaut d'accommodation de l'œil. Avec l'âge le cristallin perd de son élasticité et de l'accommodation nécessaire à la vision de près ne peut plus se faire. On corrige ce défaut par le port de verres « progressifs ». La partie haute est destinée à la correction éventuelle de la vision de loin et la partie basse, destinée à la vision de près, est construite pour former sur la rétine l'image d'un objet situé à une cinquantaine de centimètre des yeux.

Astigmatisme : il y a astigmatisme de l'œil lorsque celui-ci ne parvient pas à focaliser dans un même plan les images d'objets qui se trouvent dans deux directions perpendiculaires d'un même plan objet. On corrige ce défaut à l'aide de verres eux-mêmes astigmatiques, mais dont l'astigmatisme est « inverse » de celui de l'œil, et ainsi le compense.

EXERCICES ET PROBLEMES – CHAPITRE 4

I) Représentation de l'œil par un système centré



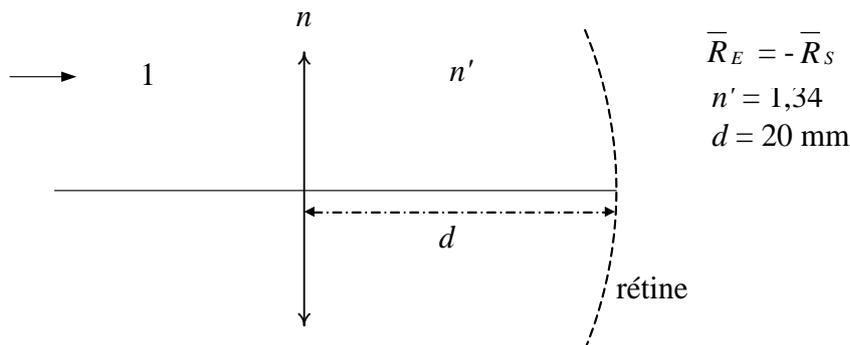
On représente l'œil par le système centré schématisé sur la figure ci-dessus.

- 1) Calculer la matrice de transfert du système. En déduire les éléments cardinaux.
- 2) Lorsque l'œil observe un objet situé à l'infini, l'image de l'objet qu'il donne se forme sur la rétine. Trouver la distance SR séparant la rétine R du dioptre de sortie en S.

II) Projection d'une diapositive

Une lentille mince L , de longueur focale $f = 5$ mm, donne d'une diapositive de 24 mm de hauteur, située devant elle, une image sur un écran de projection placé à 4 m de L . Calculer la vergence de L , la position de l'objet et la taille de l'image.

III) Accommodation de l'œil



On approxime l'œil à une lentille mince.

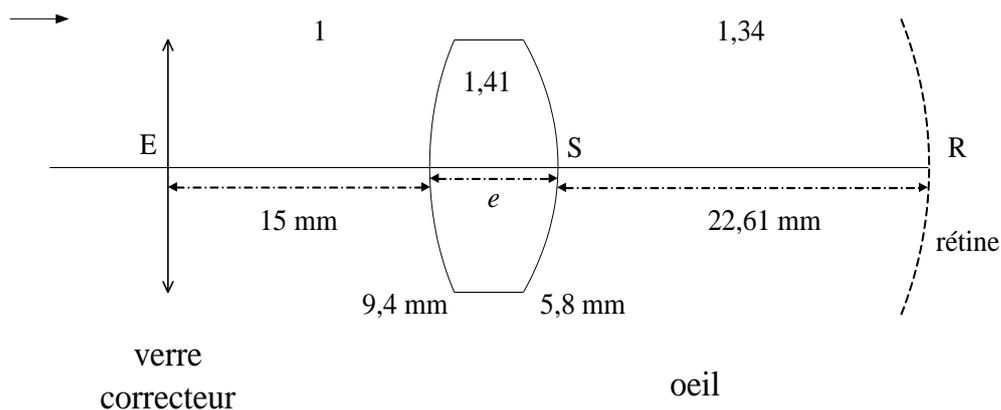
- 1) Pour qu'un objet soit perçu par l'œil, il faut que son image soit reçue sur la rétine. Cette condition est réalisée pour la vision à l'infini : le cristallin est alors au repos. Calculer dans ce cas le rayon de courbure de la lentille.

- 2) Pour observer un objet rapproché, l'œil accommode : les muscles du cristallin augmentent sa vergence. Calculer le rayon de courbure de la lentille pour qu'un objet situé à 20 cm soit perçu correctement.

IV) Oculaire de Ramsden (3,2,3)

- 1) Trouver les éléments cardinaux de ce doublet sachant que la distance entre les lentilles est de 16 mm. Cet oculaire est-il positif ou négatif ?
- 2) Construire le trajet de rayons lumineux issus d'un objet situé dans le plan focal objet.
- 3) Sous quel angle, un observateur dont l'œil est placé sur l'axe de l'oculaire, voit-il l'image d'un objet de 1 mm de diamètre situé dans le plan focal objet ?
- 4) Quel est le grossissement (on prendra $d_m = 25$ cm) ?

V) Correction d'un œil hypermétrope



La matrice de transfert du système centré qui représente l'œil est la suivante :
(voir exercice 2 du TD n°5)

$$T_{\text{oeil}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -12,07 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & e/1,41 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -43,62 & 1 \end{bmatrix}$$

Lorsque $e = 2,4$ mm, la vision de l'œil est correcte : l'image d'un objet situé à l'infini est formée sur la rétine.

On se place maintenant dans le cas où $e = 2$ mm.

- 1) Où se forme, par rapport à la rétine, l'image d'un objet situé à l'infini ?

De manière à corriger le défaut de cet œil, on place à 15 mm un verre correcteur (lentille mince de focale f) d'indice $n = 1,5$.

- 2) Calculer la matrice de transfert $T(\overline{ES})$ du système lentille-œil.
- 3) Quel doit être la focale de la lentille pour que l'image d'un objet localisé à l'infini se forme sur la rétine ? Si la face de sortie de la lentille est plane, en déduire le rayon de courbure \overline{R} de la face d'entrée de la lentille.

VI) Correction d'un œil myope

L'œil est toujours décrit par la matrice de transfert $T_{\text{œil}}$ de l'exercice.

On se place maintenant dans le cas où $e = 3 \text{ mm}$.

- 1) Où se forme, par rapport à la rétine, l'image d'un objet situé à l'infini ?

De manière à corriger le défaut de cet œil, on place à 15 mm un verre correcteur (lentille mince de focale f) d'indice $n = 1,4$.

- 2) Calculer la matrice de transfert $T(\overline{ES})$ du système lentille-œil.
- 3) Quel doit être la focale de la lentille pour que l'image d'un objet localisé à l'infini se forme sur la rétine ?
- 4) Quel type de lentille peut-on utiliser pour corriger la vision de cet œil ? Si le rayon de courbure \overline{R}_1 de la face d'entrée de la lentille est tel que $|\overline{R}_1| = 1 \text{ m}$, déterminer le rayon de courbure \overline{R}_2 de la face de sortie de la lentille (donner le signe des deux rayons).

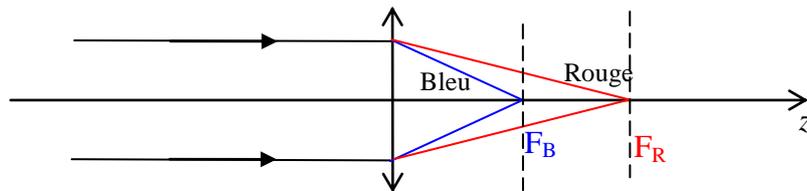
Chapitre 4

ABERRATION CHROMATIQUE – DOUBLET

I. Aberration chromatique

Nous avons vu que l'indice de réfraction d'un milieu variait avec la fréquence de la lumière. C'est le phénomène de dispersion. Or l'indice intervient dans toutes les caractéristiques des instruments et l'image donnée par un instrument dépend donc, *a priori*, de la fréquence de la lumière. Si la lumière contient des fréquences assez différentes les unes des autres, alors l'image globale pourra être altérée : c'est **l'aberration chromatique**.

A. Mise en évidence



Dans l'approximation des lentilles minces ($e \neq 0$) La focale de la lentille se calcule par :

$$\frac{1}{f} = (n-1) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

On sait que l'indice de réfraction décroît avec le longueur d'onde selon une loi que l'on pourra écrire par exemple comme suit : $n^2 \approx A + \frac{C}{\lambda^2} + \frac{D}{\lambda^4}$, si l'indice B correspond à la couleur bleue, et l'indice R à la couleur rouge, on aura alors $n_R < n_B \Rightarrow f_B < f_R$

On notera $\Delta f = f_R - f_B$ l'aberration chromatique longitudinale.

B. Pouvoir dispersif des verres

Pour une lentille mince on a donc $\frac{\Delta f}{f} + \frac{\Delta n}{n-1} = 0$

La variation de la focale peut être caractérisée par $\frac{\Delta n}{n-1}$ évaluée pour deux longueurs d'onde extrêmes et une longueur d'onde moyenne $\Delta n = n_F - n_C$, et n_D . On prendra par exemple n_F pour $\lambda_F = 0,486 \mu\text{m}$ (bleu), n_C pour $\lambda_C = 0,656 \mu\text{m}$ (rouge) et n_D pour $\lambda_D = 0,589 \mu\text{m}$ (jaune de l'hélium).

Le pouvoir dispersif d'un verre est par définition : $K = \frac{n_F - n_C}{n_D - 1}$

L'inverse du pouvoir dispersif est la **constringence** $A = \frac{n_D - 1}{n_F - n_C} = \frac{\bar{n} - 1}{\Delta n} = \frac{f}{\Delta f}$

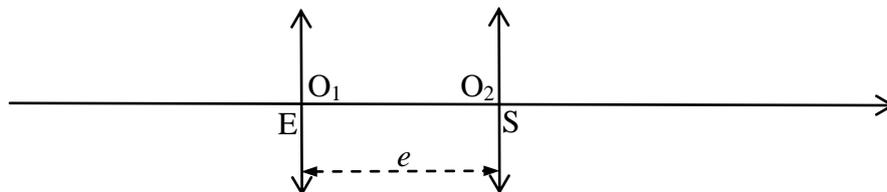
Les flints : ce sont des verres « lourds » (silicates de potassium et de plomb – le « cristal » est in flint), qui dispersent beaucoup ($30 < A < 50$) $n_D = 1,65$

Les crowns : ce sont des verres « légers » (silicates de potassium et de calcium, par exemple les borosilicates - BK7), qui dispersent moins ($50 < A < 65$) $n_D = 1,52$

II. Achromatisme

Recherchons des conditions pour réduire l'aberration chromatique

A. Condition d'achromatisme pour 2 lentilles minces



$$T(\overline{ES}) = T(O_2) \mathcal{C}(\overline{ES}) T(O_1) T(\overline{ES}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -V_2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & e \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -V_1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T(\overline{ES}) = \begin{pmatrix} 1 - eV_1 & e \\ -(V_1 + V_2 - eV_1V_2) & 1 - eV_2 \end{pmatrix}$$

on a donc $\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{e}{f_1 f_2}$

lorsque la longueur d'onde varie de $\Delta\lambda = \lambda_C - \lambda_F$ on a :

$$-\frac{\Delta f}{f^2} = -\frac{\Delta f_1}{f_1^2} - \frac{\Delta f_2}{f_2^2} + \frac{e}{f_1 f_2} \left(\frac{\Delta f_1}{f_1} + \frac{\Delta f_2}{f_2} \right)$$

l'achromatisme est réalisé lorsque $\Delta f = 0$ soit :

$$0 = \frac{1}{A_1 f_1} + \frac{1}{A_2 f_2} - \frac{e}{f_1 f_2} \left(\frac{1}{A_1} + \frac{1}{A_2} \right) \text{ c'est-à-dire : } \boxed{e = \frac{A_1 f_1 + A_2 f_2}{A_1 + A_2}} \text{ où } A_i = \frac{f_i}{\Delta f_i}$$

Cette condition d'achromatisme est relative aux raies C, F et D, l'achromatisme n'est donc pas parfait.

B. Lentilles minces accolées : $e = 0$

$$-\frac{f_2}{f_1} = \frac{A_1}{A_2} \Rightarrow \text{il faut des lentilles de natures différentes, convergente et divergente.}$$

Si on veut un ensemble convergent il faut $V = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} > 0$ soit

$$V = \frac{1}{f_1} \left(-\frac{A_2}{A_1} + 1 \right) = \frac{1}{f_1} \frac{A_1 - A_2}{A_1} > 0 \text{ les matériaux utilisés pour les deux lentilles doivent être}$$

différents. Ces conditions peuvent être réalisées de manières différentes.

Par exemple :

si $A_1 > A_2 \Rightarrow f_1$ doit être positif.

La première lentille est convergente en crown et la deuxième lentille est divergente en flint.

C. Lentilles non accolées

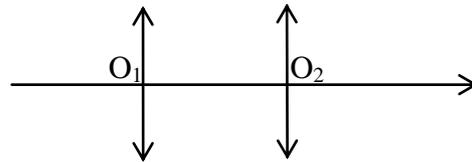
Pour des lentilles construites avec le même matériau l'achromatisme est assuré si $A_1 = A_2$ et

$$e = \frac{f_1 + f_2}{2}$$

III. Doublets

Ce sont des systèmes centrés de deux lentilles minces que l'on caractérise par 3 nombres

entiers : m, n et p tels que : $\frac{f_1}{m} = \frac{e}{n} = \frac{f_2}{p} = a$



A. Éléments cardinaux

La matrice de transfert $T(\overline{O_1 O_2})$ s'écrit :

$$T(\overline{O_1 O_2}) = \begin{pmatrix} 1 - eV_1 & e \\ -(V_1 + V_2 - eV_1V_2) & 1 - eV_2 \end{pmatrix}$$

cette matrice s'exprime entièrement avec n, m, p, a :

$$1 - eV_1 = 1 - \frac{n}{m} \quad e = na$$

$$-V = -\frac{m + p - n}{mpa} = -\frac{1}{f} \quad 1 - eV_2 = 1 - \frac{n}{p}$$

les éléments cardinaux sont donc entièrement déterminés par n, m, p, a

B. Doublets symétriques $m = p$

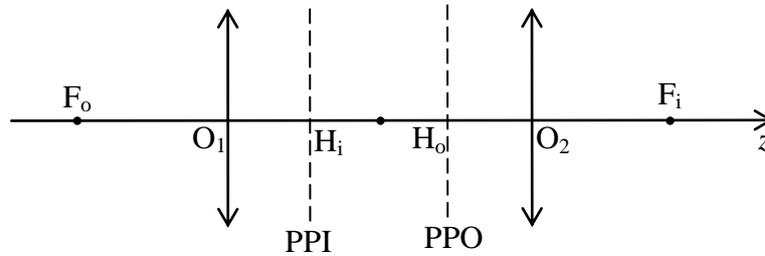
$$T(\overline{O_1 O_2}) = \begin{pmatrix} 1 - \frac{n}{m} & na \\ -(2m - n)/m^2 a & 1 - \frac{n}{p} \end{pmatrix} \quad \text{d'où les éléments cardinaux suivants :}$$

$$f = \frac{m^2}{2m - n} a, \quad \overline{O_2 H_i} = -f \frac{n}{m}, \quad \overline{O_1 H_o} = -f \frac{n}{m}$$

H_1 et H_2 sont symétriques par rapport au plan médian

Exemple : doublet 3, 2, 3

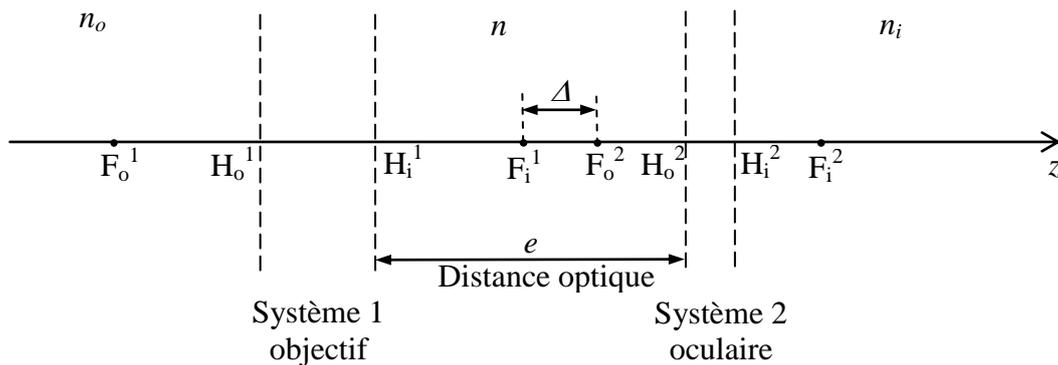
$$f = \frac{9}{6 - 2} a = \frac{9}{4} a, \quad \overline{O_2 H_i} = -\frac{9}{4} a \frac{2}{3} = -\frac{3}{2} a = -\overline{O_1 H_o}$$



Chapitre 5

ASSOCIATION DE 2 SYSTÈMES CENTRÉS

I. Association de 2 systèmes centrés



Calcul de la vergence du système :

$$T(\overline{H_o^1 H_i^2}) = T(\overline{H_o^2 H_i^2}) \mathcal{C}(\overline{H_i^1 H_o^2}) T(\overline{H_o^1 H_i^1})$$

$$T(\overline{H_o^1 H_i^2}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -V_2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & e/n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -V_1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$V = V_1 + V_2 - \frac{e}{n} V_1 V_2$$

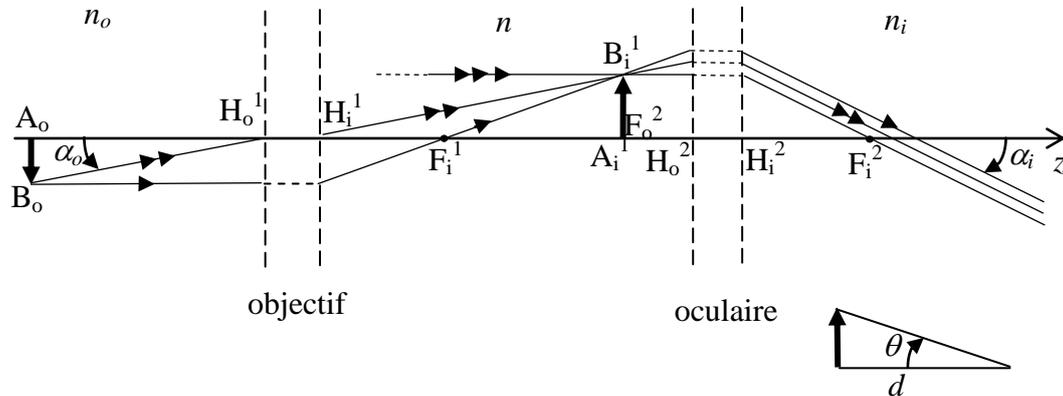
en fonction des focales images $f_1 = \frac{n}{V_1}$ et $f_2 = \frac{n_i}{V_2}$ la vergence devient :

$$V = \frac{n_i}{f_i} = \frac{n}{f_1} + \frac{n_i}{f_2} - \frac{en_i}{f_1 f_2}$$

dans le cas où $n = n_i$ on a : $f_i = -\frac{f_1 f_2}{\Delta}$ avec $\Delta = \overline{F_i^1 F_o^2}$

II. Le microscope : Formation de l'image

Son fonctionnement idéal : lorsque l'image réelle donnée par l'objectif se trouve dans le plan focal objet de l'oculaire (dans ce cas l'œil normal n'accommode pas).



Grossissement

A l'œil nu, à la distance minimale de vision distincte ($d = 25$ cm) l'objet $A_o B_o$ est vu sous l'angle θ . On définit le grossissement par :

$$G = \frac{|\alpha_i|}{\theta} = \frac{\overline{A_i^{obj} B_i^{obj}}}{f_2} \frac{d}{\overline{A_o B_o}} = \frac{\overline{A_i^1 B_i^1}}{\overline{A_o B_o}} \frac{d}{f_2} = |G_t| G_2 \text{ où } G_2 \text{ est le grossissement oculaire}$$

Puissance (intrinsèque)

On appelle puissance : $P = \frac{1}{f_i} = -\frac{\Delta}{f_1 f_2}$ le microscope est un système dioptrique divergent.

Exemple : en général $\Delta = 16$ cm par construction (c'est l'ensemble rigide oculaire-objectif qui se déplace par rapport à la préparation observée qui tient lieu d'objet)

$$f_1 = 1 \text{ cm} \quad f_2 = 2,5 \text{ cm} \quad G_t = -\frac{\overline{A_i^1 B_i^1}}{\overline{A_o B_o}} = -\frac{\overline{F_i^1 F_o^1}}{\overline{H_i^1 F_i^1}} = -\frac{\overline{F_i^1 F_o^1}}{f_1} = -16 \quad G_2 = \frac{d}{f_2} = 10$$

$$\text{d'où } G = 160 \quad \text{et} \quad P = -\frac{16}{1,2,5} = 6,4 \text{ cm}^{-1} = 640 \text{ m}^{-1} = -640 \delta \Rightarrow f_i = -1,5 \text{ mm}$$

Chapitre 6

SYSTÈMES CENTRÉS AFOCAUX

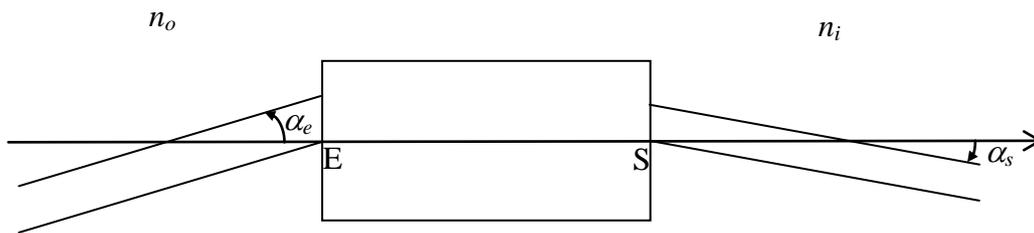
Définition : ce sont des systèmes dioptriques dont la vergence est nulle. Les foyers sont donc à l'infini, ce qui conduit à faire une étude particulière pour ces systèmes.

L'utilisation de ce genre de système correspond aux cas où l'objet dont on veut construire l'image peut être considéré comme étant à l'infini (faisceau parallèle incident) et où l'image se forme sur la rétine (l'oeil est placé à la sortie du système) ou sur un écran placé dans le plans focal image d'une lentille placée elle-même derrière le système. Dans ces deux cas on a un faisceau parallèle qui émerge du système optique.

I. Caractéristiques des instruments afocaux

A. Matrice de transfert

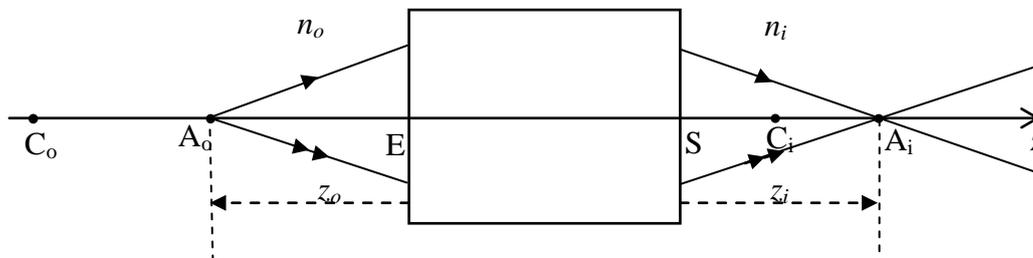
$$V = 0 \Rightarrow T(\overline{ES}) = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ 0 & T_{22} \end{pmatrix}$$



$$\alpha_s = T_{22} \frac{n_o}{n_i} \alpha_e, \forall x_e$$

à un faisceau incident parallèle correspond un faisceau émergent parallèle.

B. Relation entre plans objet et image



$$T(\overline{A_o A_i}) = \mathcal{C}(\overline{SA_i}) T(\overline{ES}) \mathcal{C}(\overline{A_o E})$$

$$T(A) = \begin{pmatrix} 1 & z_i/n_i \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ 0 & T_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -z_o/n_o \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T_{11}(A) = T_{11} \quad T_{11} = G_t$$

$$T_{22}(A) = T_{22} \quad T_{22} = \frac{n_i}{n_o} G_a$$

$$T_{12}(A) = 0 = T_{12} - T_{11} \frac{z_o}{n_o} + T_{22} \frac{z_i}{n_i} \text{ est la relation de conjugaison}$$

Dans le cas des systèmes afocaux on préfère utiliser un couple de points conjugués particulier (ici A_o et A_i) et exprimer la conjugaison par rapport à ces points. On caractérise ensuite la position de points quelconques (C_o et C_i sur le schéma ci-dessus) en différenciant la relation de conjugaison. Ainsi on obtient :

$$-T_{11} \frac{\Delta z_o}{n_o} + T_{22} \frac{\Delta z_i}{n_i} = 0$$

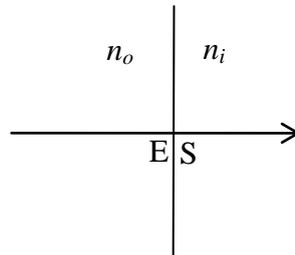
II. Exemple de systèmes afocaux : association de dioptries plans

A. Dioptre plan

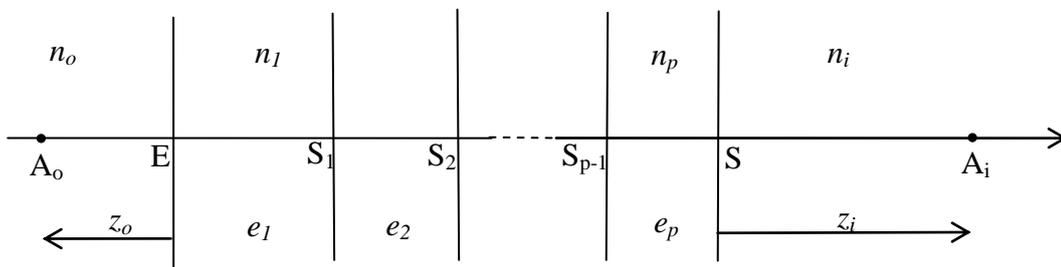
$$T(\overline{ES}) = \mathcal{R}(P) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (I)$$

La relation de conjugaison s'écrit :

$$T_{12}(A) = 0 = T_{12} - T_{11} \frac{z_o}{n_o} + T_{22} \frac{z_i}{n_i} \Rightarrow -\frac{z_o}{n_o} + \frac{z_i}{n_i} = 0$$



B. Succession de dioptries plans (parallèles)



$$T(\overline{A_o A_i}) = \mathcal{T}(\overline{SA_i}) \mathcal{R}(S) \mathcal{T}(e_p) \mathcal{R}(S_{p-1}) \mathcal{T}(e_{p-1}) \dots \mathcal{T}(e_1) \mathcal{R}(E) \mathcal{T}(\overline{A_o E})$$

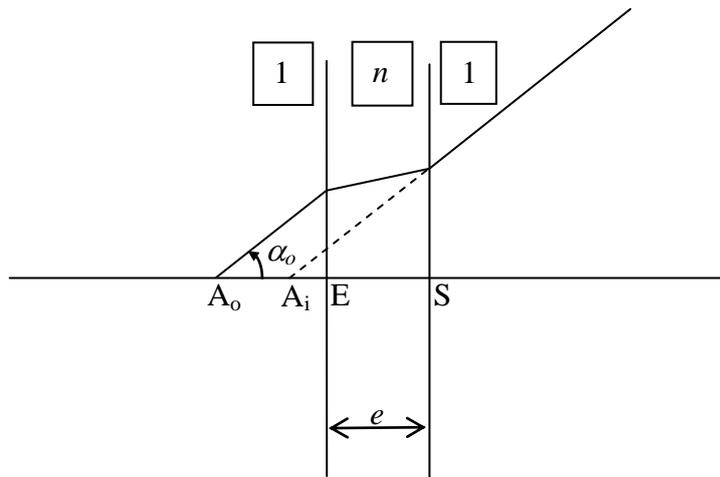
Les dioptries étant plans toutes les matrices de réfraction sont ici égales à la matrice unité : $\mathcal{R}(S_i)=(I)$ et on a :

$$T(\overline{A_o A_i}) = \prod_i \mathcal{T}(e_i) = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{z_o}{n_o} + \frac{e_p}{n_p} + \dots + \frac{e_1}{n_1} + \frac{z_i}{n_i} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

L'image A_i se trouve en z_i tel que :

$$\frac{z_i}{n_i} + \frac{e_p}{n_p} + \dots + \frac{e_1}{n_1} - \frac{z_o}{n_o} = 0$$

Exemple : lame à faces parallèles dans l'air



$$T(\overline{A_o A_i}) = \begin{pmatrix} 1 & -z_o + \frac{e}{n} + z_i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La relation de conjugaison donne : $-z_o + \frac{e}{n} + z_i = 0$

Soit : $-\overline{EA_o} + \frac{e}{n} + \overline{SA_i} = 0$ qui devient en introduisant $e = \overline{ES}$ il vient :

$$\overline{A_o E} + \overline{ES} + \overline{SA_i} + \frac{\overline{ES}}{n} - \overline{ES} = 0$$

Soit finalement : $\overline{A_o A_i} = e \left(1 - \frac{1}{n} \right)$

On a : $\frac{n_i}{n_o} G_a = 1$ ce qui implique ici que $G_a = 1$ et que le faisceau émergent est parallèle au faisceau incident.

III. Exemple : lunette astronomique

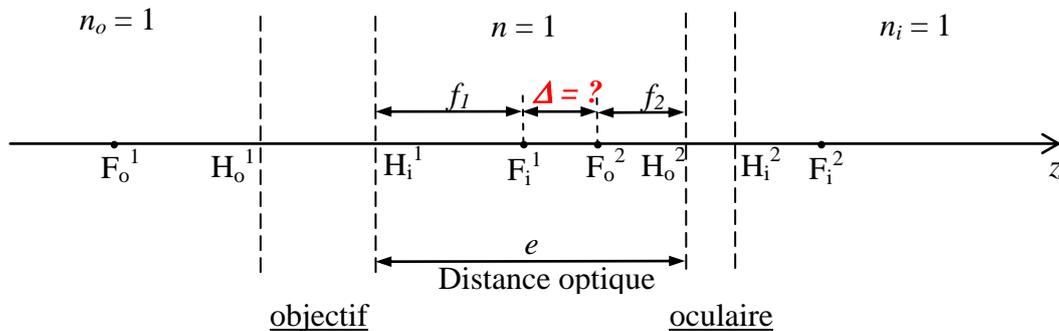
Le rôle d'un tel instrument est double :

- 1) augmenter l'angle sous lequel on voit un objet étendu qui est éloigné tel une planète
- 2) collecter le maximum de lumière provenant d'un objet ponctuel

A. Description

Elle comporte un système optique convergent de grande focale (de l'ordre de 1 m) qui reçoit directement la lumière de l'objet et qui donne d'un objet éloigné une image dans son plan focal : c'est l'*objectif*. Pour observer cette image l'observateur place celle-ci au foyer objet d'un oculaire (dont la focale est de l'ordre de 1 cm).

B. Matrice de transfert



C'est une association de systèmes centrés.

$$T(\overline{ES}) = T(\text{oculaire}) \mathcal{C}(H_i^1 H_o^2) T(\text{objectif})$$

$$T(\overline{ES}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -V_2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & e \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -V_1 & 1 \end{pmatrix}$$

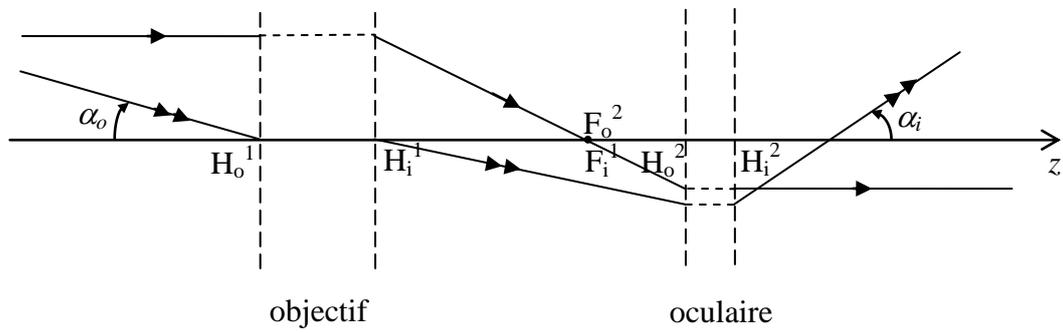
$$T(\overline{ES}) = \begin{pmatrix} 1 - eV_1 & e \\ -(V_1 + V_2 - \frac{e}{n}V_1V_2) & 1 - eV_2 \end{pmatrix}$$

La lunette est un système afocal donc $V = 0$

$$\text{Or } V_1 = \frac{1}{f_1} \text{ et } V_2 = \frac{1}{f_2}, \text{ donc } \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{e}{f_1 f_2} = 0 \text{ soit : } \boxed{e = f_1 + f_2} \text{ et } \Delta = 0,$$

Le foyer image de l'objectif F_i^1 et le foyer objet de l'oculaire sont donc confondus.

$$\text{Finalement : } T(\overline{ES}) = \begin{pmatrix} -f_2/f_1 & f_1 + f_2 \\ 0 & -f_1/f_2 \end{pmatrix} \text{ et } G_i = -\frac{f_2}{f_1} = G_a^{-1}$$



Grossissement : $G = \frac{|\alpha_i|}{\theta}$ ici $\theta = \alpha_o$ car l'objet est éloigné, donc $G = G_a = \frac{f_1}{f_2}$

INTERFERENCES

On s'est intéressé jusqu'ici essentiellement à la propagation d'une onde unique émise en un endroit, qui atteint en suivant un trajet un autre endroit. On considèrera maintenant les cas où différents chemins existent pour aller de l'émetteur au récepteur, ces situations conduisent aux phénomènes d'interférences.

I. Généralités

1. Sources d'ondes électromagnétiques

De façon simple on peut identifier trois grands types de sources de champs impliqués dans les ondes électromagnétiques :

- i. Les charges électriques immobiles, qui créent des champs électriques $\vec{E}(\vec{r})$
- ii. Les charges électriques en mouvement uniforme (courant électrique uniformes ou permanents), qui créent des champs magnétostatiques $\vec{B}(\vec{r})$
- iii. Les charges électriques animés de mouvements variables dans le temps, qui créent des champs électromagnétiques caractérisés simultanément par un champ électrique et un champ magnétique interdépendants et variables dans le temps $[\vec{E}(\vec{r},t), \vec{B}(\vec{r},t)]$. La dépendance entre ces deux champs est décrite par les équations de Maxwell.

Le rayonnement électromagnétique est caractérisé par : la fréquence, l'amplitude, la polarisation, le déphasage de \vec{E} et \vec{B} .

Lorsque les sources produisent des ondes de même fréquence et dont les déphasages relatifs restent constants, elles sont dites cohérentes entre elles. Par abus de langage on dira simplement cohérentes.

Des sources qui n'ont pas la même fréquence ou des déphasages relatifs qui varient aléatoirement dans le temps, sont dites incohérentes entre elles.

2. Composition de deux vibrations

a) Vibrations scalaires (nature physique non précisée)

Lorsqu'en un point M deux vibrations scalaires S_1 et S_2 s'ajoutent, la vibration résultante est :

$$S = S_1 + S_2$$

Lorsque S_1 et S_2 ont même pulsation ω on écrira (en utilisant la notation complexe) :

$$\tilde{S}_1 = a_1 \exp[i(\varphi_1 - \omega t)] , \tilde{S}_2 = a_2 \exp[i(\varphi_2 - \omega t)]$$

$$\tilde{S} = [a_1 \exp(i\varphi_1) + a_2 \exp(i\varphi_2)] \exp(-i\omega t)$$

ce qui peut encore s'écrire : $\tilde{S} = a \exp[i(\varphi - \omega t)]$ avec $s = \Re(\tilde{S})$

Pour calculer a le plus simple est d'exprimer $a^2 = \tilde{S} \tilde{S}^*$

$$a^2 = [a_1 \exp(i\varphi_1) + a_2 \exp(i\varphi_2)] [a_1 \exp(-i\varphi_1) + a_2 \exp(-i\varphi_2)]$$

$$a^2 = a_1^2 + a_2^2 + \underbrace{2a_1a_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)}$$

Terme d'interférence caractéristique du phénomène

Il est ici évident qu'on ne pourra observer d'interférence que si ce troisième terme garde une valeur constante dans le temps, c'est-à-dire si $\varphi_1 - \varphi_2 = c^{te}$.

Les sources d'où proviennent s_1 et s_2 doivent donc être cohérentes.

Remarque : sources de fréquences différentes

$$\tilde{S}_1 = a_1 \exp[i(\varphi_1 - \omega_1 t)], \quad \tilde{S}_2 = a_2 \exp[i(\varphi_2 - \omega_2 t)]$$

On a comme précédemment :

$$a^2 = a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2 \cos[(\varphi_1 - \varphi_2) - (\omega_1 - \omega_2)t]$$

Au point d'observation l'argument du cosinus dépend explicitement du temps, sa valeur moyenne est donc nulle et les interférences ne peuvent pas être observées.

b) Cas de la lumière

Lorsque deux ondes lumineuses atteignent un même point les champs \vec{E} et \vec{B} s'ajoutent. On limitera l'étude au cas d'ondes quasi planes, lorsque les champs qui s'ajoutent sont pratiquement parallèles. Les directions de propagations des deux ondes font alors entre elles un petit angle. Comme \vec{E} et \vec{B} sont proportionnels entre eux, pour décrire les phénomènes d'interférence on peut ne s'intéresser qu'à l'un des deux, par exemple \vec{E} (qui est celle des deux grandeurs à laquelle les récepteurs sont sensibles).

Les champs \vec{E}_1 et \vec{E}_2 peuvent alors s'écrire :

$$\vec{E}_1 = S_1 \vec{u} \quad \text{et} \quad \vec{E}_2 = S_2 \vec{u} \quad \text{d'où} :$$

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = S \vec{u}, \quad \text{avec} \quad S = S_1 + S_2$$

Les résultats **2.a)** s'appliquent au champ résultant.

Remarque : **intensité lumineuse**

L'onde lumineuse peut être caractérisée par un scalaire variable dans le temps. Les récepteurs en détectent la valeur moyenne du carré. Dans le cas d'ondes monochromatiques on a aussi :

$$\vec{E} = E_0 \cos \omega t \vec{u}, \quad \langle E^2 \rangle = E_0^2 / 2$$

On appelle **intensité lumineuse** (à ne pas confondre avec l'intensité définie en photométrie énergétique) la quantité

$$I = KE_0^2 = 2K \langle E^2 \rangle$$

Pour $K = \varepsilon c / 2$ on a

$$I = E_0^2 \varepsilon c / 2 = \langle \pi \rangle = \mathcal{E}_0, \quad \text{éclairage énergétique de l'écran perpendiculaire aux rayons lumineux.}$$

On posera donc $I = 2K \langle S^2 \rangle$ et dans la pratique pour calculer l'intensité lumineuse on évalue S^2 .

II. Phénomène d'interférences à deux ondes (en optique)

1. Obtention des interférences

$$\tilde{S}_1 = S_1 \exp[i(\varphi_1 - \omega t)] , \tilde{S}_2 = S_2 \exp[i(\varphi_2 - \omega t)]$$

$$\tilde{S} = a \exp[i(\varphi - \omega t)]$$

$$S^2 = S_1^2 + S_2^2 + 2S_1S_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)$$

soit encore :

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \langle \cos(\varphi_2 - \varphi_1) \rangle$$

si $(\varphi_2 - \varphi_1)$ varie aléatoirement :

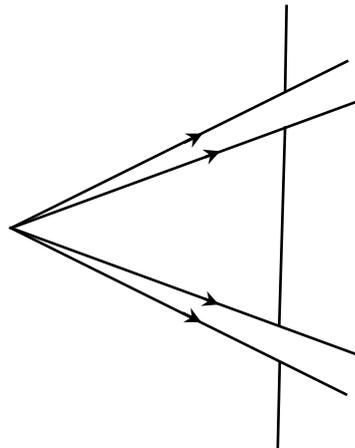
les sources lumineuses sont incohérentes alors $\langle \cos(\varphi_2 - \varphi_1) \rangle = 0 \Rightarrow I = I_1 + I_2$ c'est ce que l'on observe couramment lorsqu'on ne prend pas de précaution particulière.

si $(\varphi_2 - \varphi_1)$ demeure constant dans le temps :

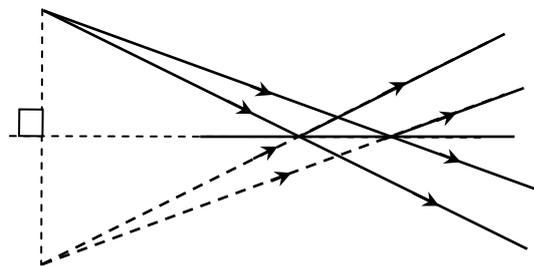
on a alors $I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \langle \cos(\varphi_2 - \varphi_1) \rangle$

remarques :

a) la création d'un phénomène d'interférence nécessite l'emploi de sources cohérentes. Dans la pratique ceci n'est réalisable en optique qu'en faisant interférer deux ondes issues d'une même source après avoir eu des conditions de propagation différentes. Le terme $\varphi_2 - \varphi_1$ dépend alors seulement des trajets géométriques.



Division du front d'onde



Division d'amplitude

b) Dans le cas particulier où $I_1 = I_2 = I_0$ on a :

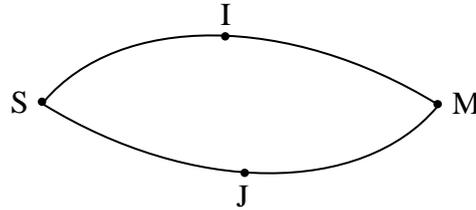
$$I = 2I_0[1 + \cos(\varphi_2 - \varphi_1)] = 4I_0 \cos^2 \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}$$

pour $(\varphi_2 - \varphi_1) = (2p+1)\pi$, p entier naturel, on a $I = I_{min} = 0$

pour $(\varphi_2 - \varphi_1) = 2p\pi$, p entier naturel, on a $I = I_{max} = 4I_0$

2. Calcul du déphasage

Il s'agit de calculer le déphasage de deux ondes qui ont suivi des trajets différents.



$$\varphi_2(M) - \varphi_1(M) = [\varphi_2(M) - \varphi_2(S)] - [\varphi_1(M) - \varphi_1(S)]$$

On va d'abord évaluer une quantité telle que $\varphi(M) - \varphi(S)$ sur un trajet.

Soit une onde progressive d'élongation $S(M,t)$:

$$S(M,t) = A(M) \exp[i(\varphi(M) - \omega t)]$$

Au voisinage d'un point M_0 on a :

$$\varphi(M) \approx \varphi(M_0) + (\vec{\nabla}_{M_0} \varphi) \cdot \overline{M_0 M}$$

qui est l'écriture à trois dimensions du développement de Taylor limité à l'ordre 1 :

$$\varphi(M) \approx \varphi(M_0) + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)_{M_0} \cdot \overline{M_0 M}$$

Si $A(M)$ est quasi constant sur une longueur d'onde, cette onde est dite quasi plane, on pose

alors : $\vec{k} = \vec{\nabla}_{M_0} \varphi$

On a $c = \frac{\omega}{\|\vec{k}\|}$ et donc $\|\vec{k}\| = n \frac{\omega}{c_0} = n \|\vec{k}_0\| = n \frac{2\pi}{\lambda_0}$ où λ_0 est la longueur d'onde dans le vide.

Pour un « rayon lumineux » issu de S on a :

$$\varphi(M) - \varphi(S) = \int_{SM} \vec{\nabla} \varphi \cdot d\vec{M} = \int_{SM} \vec{k} \cdot d\vec{M}$$

en intégrant le long d'un rayon lumineux où \vec{k} et $d\vec{M}$ sont colinéaires (\vec{k} est un vecteur tangent à la trajectoire du rayon lumineux) on arrive à :

$$\varphi(M) - \varphi(S) = \frac{2\pi}{\lambda_0} L, \text{ où } L = \int_{SM} n d\ell \text{ n'est autre que le chemin optique entre S et M}$$

(introduit en optique géométrique).

Au passage on remarquera que l'on a utilisé comme définition des rayons : les lignes de champ du vecteur \vec{k} .

La réponse à la question posée est alors immédiate :

$$\Delta\varphi(M) = \varphi_2(M) - \varphi_1(M) = \frac{2\pi\delta}{\lambda_0}, \text{ avec } \delta = L_2 - L_1$$

Dans le calcul de $\varphi_2 - \varphi_1$ le temps n'intervient pas, on observe effectivement un phénomène d'interférence qui ne dépend que de la différence de chemin optique entre les deux trajets suivis par les rayons lumineux.

3. Franges d'interférence

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \Delta\varphi, \text{ avec } \Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$$

L'intensité lumineuse est maximale pour $\Delta\varphi = 2q\pi$, q entier,

elle correspond à une frange brillante

minimale pour $\Delta\varphi = (2q+1)\pi$, q entier

elle correspond à une frange sombre

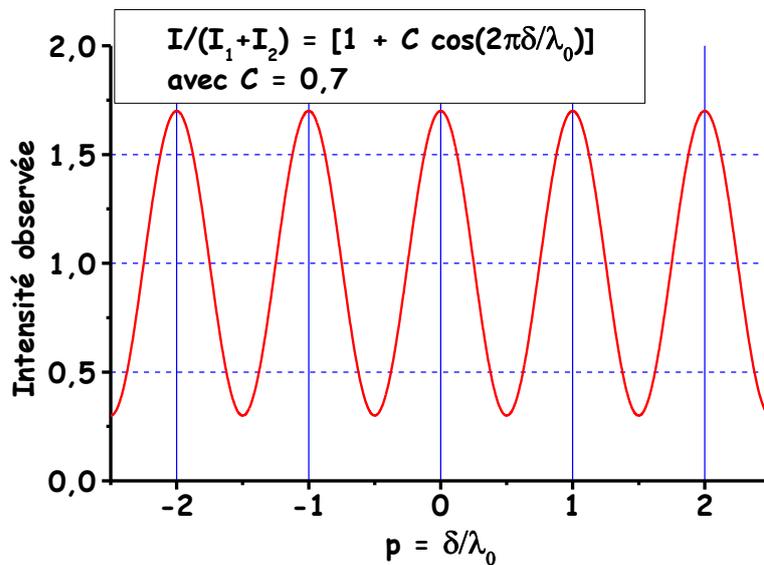
Ordre d'interférence : on pose $\Delta\varphi = 2\pi p$, p est appelé « *ordre d'interférence* ». Une frange brillante correspond à un ensemble de points pour lesquels p a une valeur déterminée et entière.

Contraste C (ou visibilité)

$$\text{On pose } C = \frac{I_{\text{Max}} - I_{\text{min}}}{I_{\text{Max}} + I_{\text{min}}} = \frac{2\sqrt{I_1 I_2}}{I_{\text{Max}} + I_{\text{min}}} \Rightarrow 0 \leq C \leq 1$$

$$\text{On a donc } I = (I_1 + I_2) [1 + C \cos \Delta\varphi]$$

$$I = (I_1 + I_2) \left[1 + C \cos \frac{2\pi\delta}{\lambda_0} \right]$$



Interfrange

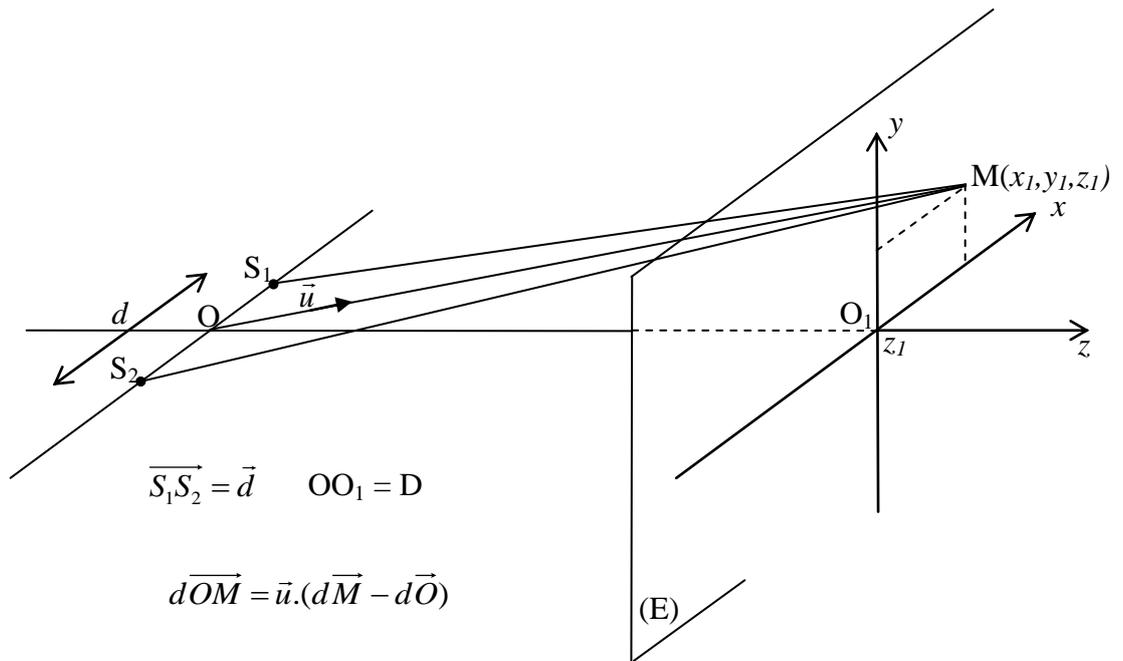
Un système donnant lieu à l'interférence de 2 ondes peut se réduire au schéma ci-dessous.

Les calculs précédents (en particulier celui de $\Delta\varphi$) imposent d'envisager l'utilisation de sources cohérentes S_1 et S_2 , d'ondes quasiplanes dont les plans d'ondes sont quasiparallèles, ce qui impose que \vec{r}_1 et \vec{r}_2 soient sensiblement parallèles, soit encore : $D \gg d$

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda_0} n(r_2 - r_1)$$

Les lieux des points tels que $\Delta\varphi = C^{te}$ (correspondant à la même intensité lumineuse) sont des hyperboloïdes de foyers S_1 et S_2 . L'intersection de ces surfaces avec la plan d'observation (E) donne les franges d'interférence.

Un cas fréquemment envisagé est celui où l'écran est parallèle à la direction des sources :



$$\delta = (S_2M) - (S_1M) = -n\vec{u} \cdot \overrightarrow{S_1S_2}$$

$$\vec{u} = \frac{\overrightarrow{OM}}{\|\overrightarrow{OM}\|} = \frac{x\vec{i} + y\vec{j} + D\vec{k}}{(x^2 + y^2 + D^2)^{1/2}}, \quad \overrightarrow{S_1S_2} = -d\vec{i}$$

$$\delta = \frac{ndx}{(x^2 + y^2 + D^2)^{1/2}} \text{ dans le cas où } |x| \ll D \text{ et } |y| \ll D \text{ on a : } \delta = \frac{ndx}{D} \text{ et}$$

$$I = (I_1 + I_2) \left[1 + C \cos \frac{2\pi ndx}{\lambda_0 D} \right]$$

Les franges d'interférences ($I = C^{te}$) sont les droites $x = C^{te}$, elles sont donc perpendiculaires à la direction S_1S_2

La distance entre deux points homologues est appelée interfrange i_0 , elle correspond à

$$\frac{2\pi ndi_0}{\lambda_0 D} = 2\pi, \quad \boxed{i_0 = \frac{\lambda_0 D}{nd}}$$

Exemple : $D = 1\text{m}$ $d = 0,5 \text{ mm}$ $\lambda_0 = 500 \text{ nm}$ $n = 1$ (air) alors $i_0 = 1 \text{ mm}$

4. Exemples de dispositifs permettant la réalisation expérimentale d'interférences à deux ondes

La réalisation de deux sources cohérentes peut être faite en optique par division du front d'onde ou par division d'amplitude.

Beaucoup de montages reposent sur la première méthode en utilisant deux images d'une source S fournies par deux systèmes optiques généralement symétriques qui donnent des sources secondaires S_1 et S_2 en phase. Les franges s'observent dans tout le volume où les faisceaux lumineux se superposent.

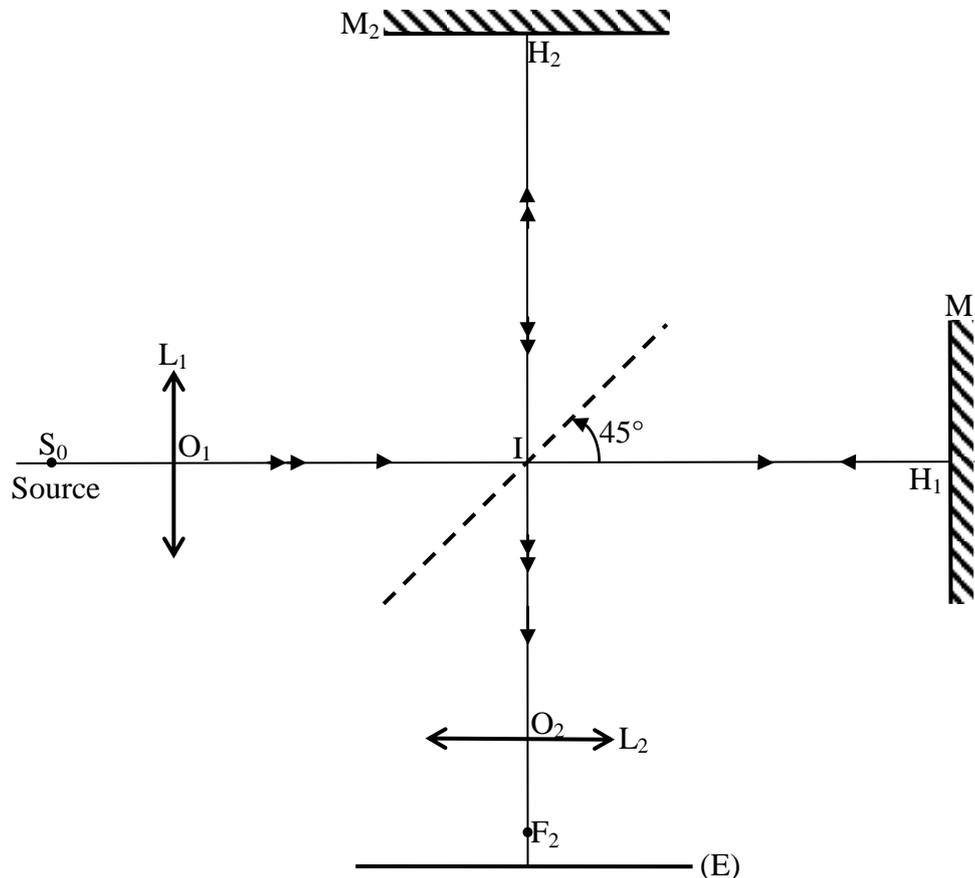
On se reportera aux ouvrages disponibles en bibliothèque universitaire pour étudier les dispositifs suivants :

- a. Miroirs de Fresnel : S_1 et S_2 sont les images (rigoureuses) de la source S donnée par deux miroirs faisant entre eux un petit angle.

- b. Biprisme de Fresnel : S_1 et S_2 sont les images approximatives de la source S donnée par deux prismes de petit angle.
- c. Demi-lentilles de Billet : S_1 et S_2 sont les images approximatives de la source S donnée par deux demi-lentilles.

Interféromètre de Michelson

C'est un appareil qui permet d'obtenir tous les types de franges d'interférence.



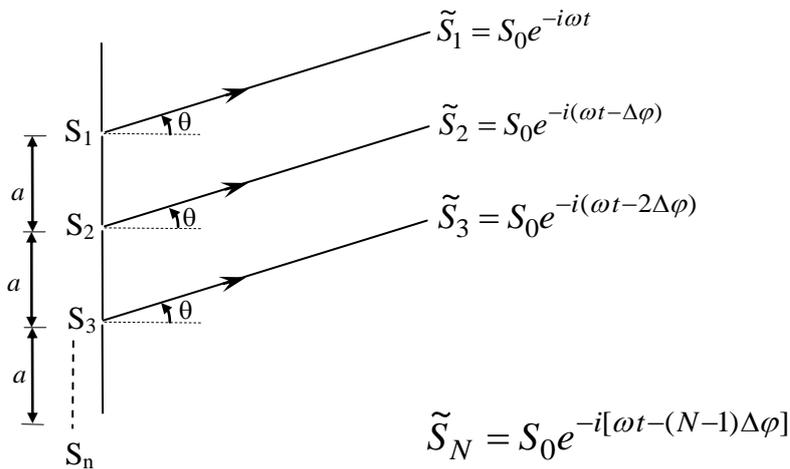
C'est un appareil à faisceaux séparés (obtenus par division d'amplitude). La lentille L_1 donne de S_0 une image S à l'infini ou à grande distance, les 2 faisceaux sont renvoyés sur eux-mêmes par les deux miroirs M_1 et M_2 qui leur sont perpendiculaires. Les interférences sont observées dans le plan de la lentille L_2 .

- Si M_1 et M_2 sont symétriques alors les images S_1 et S_2 , données par les deux miroirs, sont confondues et $\Delta\varphi$ est le même en tout point de l'écran d'observation (E) qui est uniformément éclairé.
- Si M_1 et M_2 sont orthogonaux entre eux et que les deux bras IH_1 et IH_2 sont de longueurs inégales, alors on observe des interférences sur l'écran (E) sous forme d'anneaux concentriques
- Si M_2 est tourné de θ par rapport à M_1 , S_2 tourne de 2θ et on observe des franges d'interférence rectilignes parallèles à l'axe de rotation.

III. Interférences à ondes multiples

Il s'agit du cas où plusieurs sources cohérentes (ou synchrones), ponctuelles et identiques sont distribuées linéairement. L'observation est faite à très grande distance par rapport à la distance de séparation de source, de sorte que les rayons qui interfèrent puissent être considérés comme rigoureusement parallèles.

Calcul de l'intensité résultante



$$\Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda_0} na \sin \theta$$

La vibration résultante est donc \tilde{S} telle que :

$$\begin{aligned} \tilde{S} &= \tilde{S}_1 + \tilde{S}_2 + \dots + \tilde{S}_N = S_0 \left[1 + e^{i\Delta\phi} + \dots + e^{i(N-1)\Delta\phi} \right] e^{-i\omega t} \\ &= S_0 \frac{1 - e^{iN\Delta\phi}}{1 - e^{i\Delta\phi}} e^{-i\omega t} \end{aligned}$$

$$\text{soit : } \tilde{S} = S_0 e^{i(N-1)\frac{\Delta\phi}{2}} \frac{\sin\left(\frac{N\Delta\phi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\Delta\phi}{2}\right)} e^{-i\omega t}$$

$$\text{Soit finalement une intensité } I = I_0 \left[\frac{\sin\left(\frac{N\Delta\phi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\Delta\phi}{2}\right)} \right]^2$$

$$I = I_{Max} \text{ pour } \frac{\Delta\phi}{2} = \pi, \text{ soit } I_{Max} = N^2 I_0$$

$$I = I_{Min} \text{ pour } N \frac{\Delta\phi}{2} = k' \pi, \text{ avec } \frac{\Delta\phi}{2} \neq k\pi, k \text{ et } k' \text{ entiers relatifs soit } I_{Min} = 0$$

$$\text{Maxima secondaires : } I \approx \frac{I_0}{\sin^2\left(\frac{\Delta\phi}{2}\right)} \ll I_{Max} = N^2 I_0 \text{ (quand } N \text{ est grand)}$$

Etude sommaire de la courbe $I(\Delta\varphi)$: cas $N = 6$

$$I = I_0 \left[\frac{\sin\left(\frac{6\Delta\varphi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\Delta\varphi}{2}\right)} \right]^2$$

$$I(\Delta\varphi) = 0 \text{ pour } \sin\left(\frac{6\Delta\varphi}{2}\right) = 0 \text{ et } \sin\left(\frac{\Delta\varphi}{2}\right) \neq 0$$

c'est-à-dire

$$I(\Delta\varphi) = 0 \text{ pour } \frac{6\Delta\varphi}{2} = p\pi \text{ } p \text{ entier différent de 0 et non multiple de 6, } p = 1,2,3,4,5$$

Dans le cas où $p = 0$ modulo 6 l'expression $I(\Delta\varphi)$ est indéterminée.

Comme I est périodique il suffit d'examiner $I(\Delta\varphi)$ au voisinage de $\Delta\varphi = 0$

$$\text{Près de } \Delta\varphi = 0 \text{ on a : } \sin\left(\frac{6\Delta\varphi}{2}\right) = \frac{6\Delta\varphi}{2} \text{ et } \sin\left(\frac{\Delta\varphi}{2}\right) = \frac{\Delta\varphi}{2}$$

$$\lim_{\Delta\varphi \rightarrow 0} I(\Delta\varphi) = N^2 I_0 = 36 I_0 = I_{Max}$$

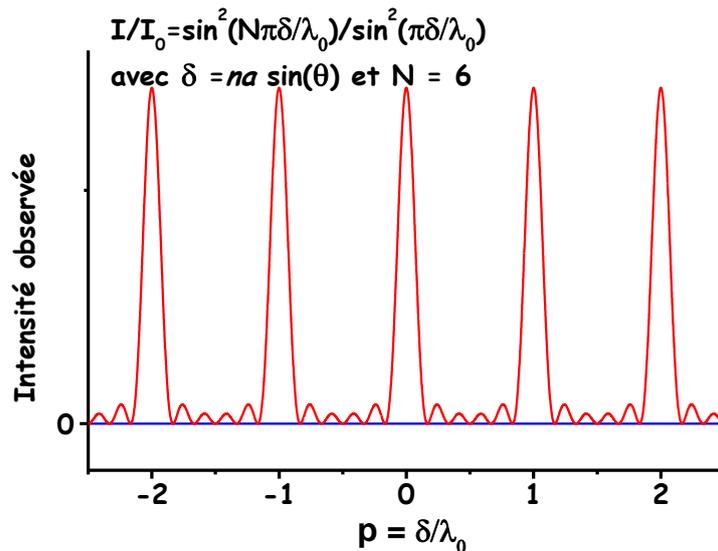
Entre deux minima nuls il y a un maximum secondaire. On peut se faire une idée de leur intensité en recherchant par exemple la valeur de I correspondant à $\Delta\varphi = \frac{3\pi}{6}$ c'est-à-dire

$$\text{l'ordre } p = \frac{\Delta\varphi}{2\pi} = \frac{1}{4}$$

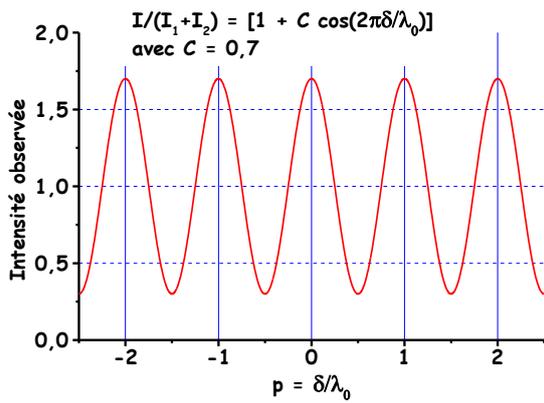
$$I\left(\frac{3\pi}{6}\right) = I_0 \frac{1}{\sin^2\left(\frac{3\pi}{12}\right)} 2I_0 \quad I\left(\frac{3\pi}{6}\right) / I_{Max} = \frac{2}{36} = 0,06$$

Les maxima secondaires sont pratiquement invisibles (pour N grand)

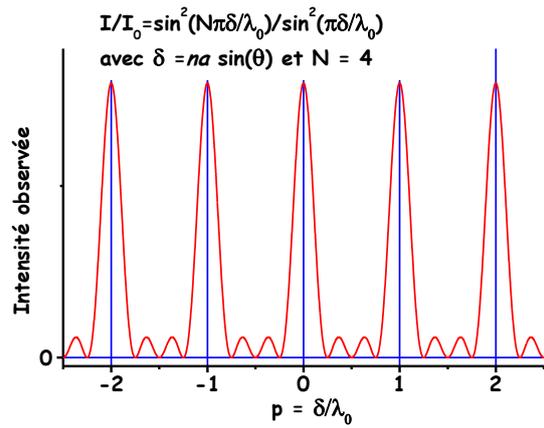
Les minima sont à $p = 1/6, 2/6, 3/6, 4/6, 5/6\dots$



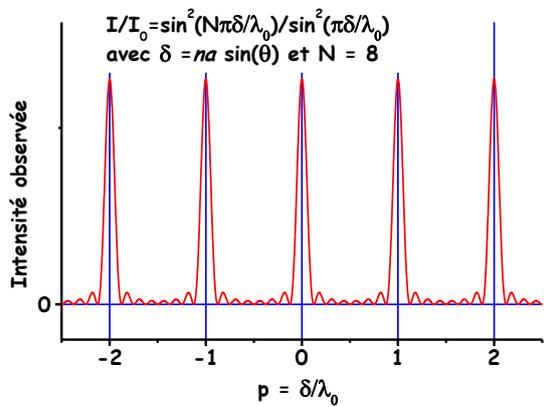
Lorsque N augmente l'intensité n'a de valeur appréciable que dans des intervalles étroits autour des valeurs entières de l'ordre d'interférence.



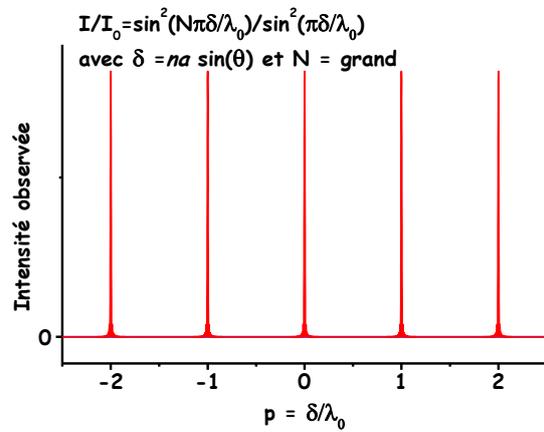
$N = 2$



$N = 4$



$N = 8$



$N = 100$

DIFFRACTION

Lorsqu'on essaie de diminuer l'étendue d'un faisceau lumineux, avec des diaphragmes par exemple, la répartition sur un écran d'observation n'est pas celle que l'on pourrait déduire de l'optique géométrique. Le nouveau phénomène qui apparaît, **la diffraction**, a de nombreuses manifestations courantes (ex : voilage à travers lequel on observe une source lumineuse éloignée : l'image géométrique de la source est entourée d'une croix provenant de la diffraction de la lumière par la fine trame du voilage)

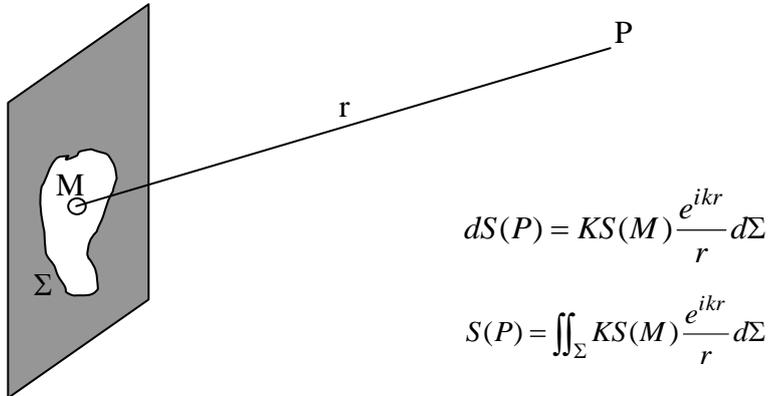
I. Principe de Huygens-Fresnel

1. Principe de Huygens

Chaque point d'une surface d'onde Σ_0 peut être considéré comme une source secondaire et la surface d'onde Σ à un instant ultérieur est l'enveloppe des surfaces d'onde sphériques provenant des sources secondaires.

2. Principe de Huygens-Fresnel

Chaque point M d'une surface d'onde Σ atteinte par la lumière peut être considéré comme une source secondaire émettant une onde sphérique. L'état vibratoire de la source secondaire est proportionnel à celui de l'onde incidente en M et à l'élément de surface $d\Sigma$ entourant le point M. Les vibrations issues des sources secondaires interfèrent entre elles.



Enoncé ainsi ce principe ramène l'étude de la diffraction à celle d'un problème d'interférences.

Pour Fresnel il s'agit d'un principe, pour nous il s'agit maintenant des conséquences de la théorie électromagnétique (Kirchhoff)

II. Diffraction à l'infini ou diffraction de Fraunhofer

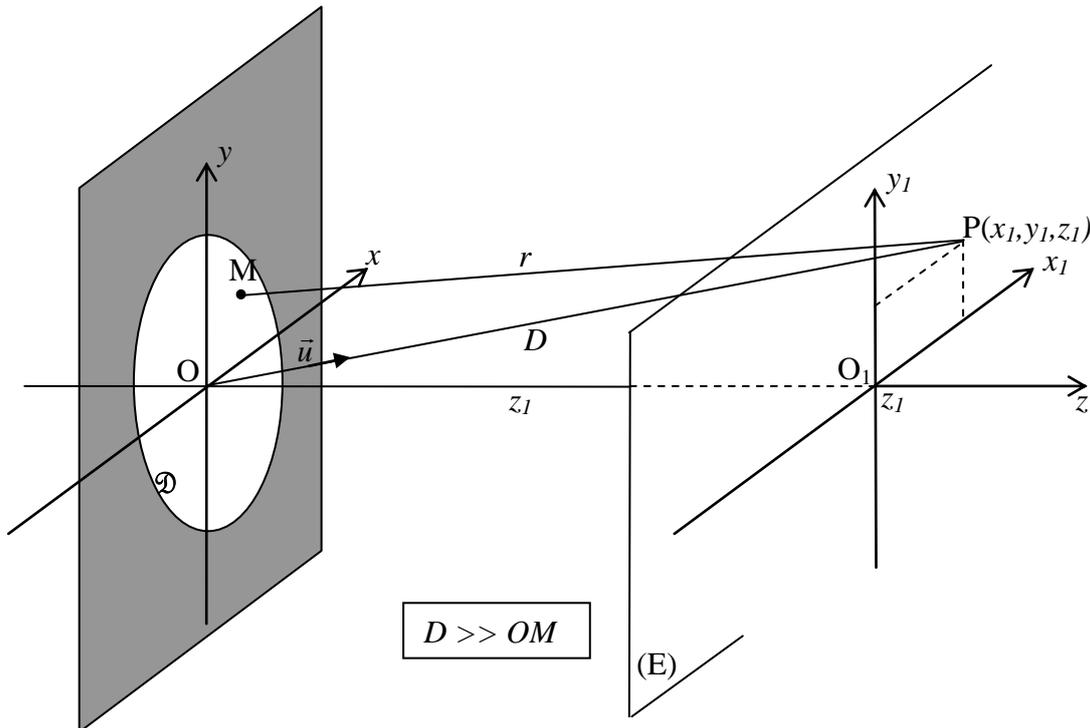
1. Amplitude diffractée par un diaphragme

a) Diffraction à distance finie et à l'infini

Les conditions d'interférence sont remplies de sorte que la distance D de P à l'écran est suffisamment grande pour que l'on puisse écrire :

$$S(P) \Rightarrow K \iint_{\Sigma} S(M) e^{ikr} d\Sigma$$

Il faut donc calculer $r = MP$ pour obtenir le déphasage correspondant au rayon diffracté par $M(x,y)$ et arrivant en $p(x_1,y_1,z_1)$



$$MP = [z_1^2 + (x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2]^{1/2}$$

$$MP = [x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 - 2(x_1x + y_1y) + x^2 + y^2]^{1/2} \approx D \left[1 - \frac{(x_1x + y_1y)}{D} + \frac{x^2 + y^2}{2D} \right]$$

On pose $\alpha = \frac{x_1}{D}$ et $\beta = \frac{y_1}{D}$ α et β sont les composantes de \vec{u} sur Ox et Oy

$$MP \approx D + \frac{x^2 + y^2}{2D} - (\alpha x + \beta y)$$

L'amplitude diffractée s'obtient par intégration sur x et y , elle dépend donc de la valeur de kr en fonction de x , y et D : c'est la **diffraction de Fresnel**.

Lorsque le second terme devient suffisamment petit, MP ne dépend plus que de $(\alpha x + \beta y)$, c'est le cas lorsque $D \rightarrow \infty$. Dans ce cas tous les rayons qui interfèrent en P ont même direction (celle de \vec{u}) : c'est la **diffraction de Fraunhofer**.

L'amplitude diffractée en P à l'infini (dans la direction de $\vec{u}(\alpha, \beta)$) sera donc pour une onde plane incidente sur \mathcal{D} (plan d'onde parallèle à \mathcal{D}) :

$$S(P) = AS_0 \iint_D \exp\left[-\frac{2i\pi}{\lambda_0}(\alpha x + \beta y)\right] dx dy$$

b) Observation de la diffraction à l'infini

Le terme $\frac{x^2 + y^2}{2D}$ doit être « petit ». Dans ce cas il peut être traduit en disant que

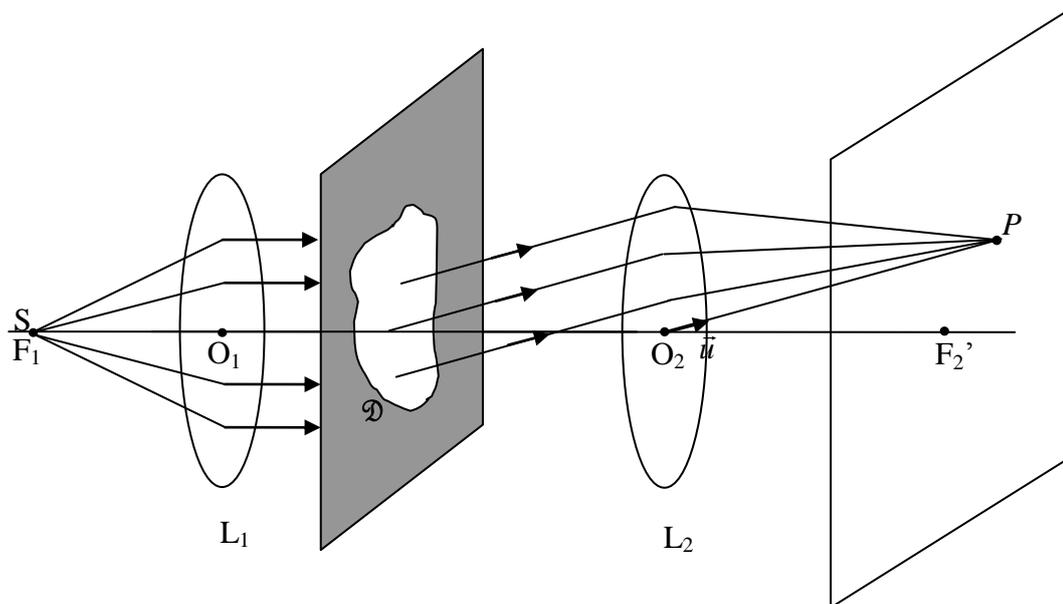
$$\exp\left[i\frac{2\pi}{\lambda} \frac{x^2 + y^2}{2D}\right] \approx 1 + \varepsilon \text{ avec } |\varepsilon| \ll 1$$

Ceci conduit à prendre D supérieur à une valeur donnée.

Exemple : si le diaphragme a un diamètre $d = 5$ mm, pour $\lambda_0 = 500$ nm, en prenant

$$|\varepsilon| < 0,5 \text{ mm on trouve } D > \frac{\pi(0,25 \cdot 10^{-3})^2}{10^{-2} \cdot 0,5 \cdot 10^{-6}} = 39 \text{ m}$$

Pour observer la diffraction à « l'infini » on utilise souvent le montage suivant :



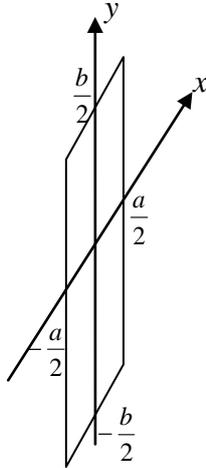
La source ponctuelle S , placée au foyer objet de la lentille L_1 , fournit un faisceau parallèle qui éclaire l'ouverture \mathcal{D} . L'observation à l'infini correspondant à la direction \vec{u} se fait dans le plan focal image de L_2 en P .

Remarques :

- Selon les lois de l'optique géométrique, L_1 et L_2 , parfaitement stigmatiques, ne devraient donner qu'un point brillant en F_2'
- La distance L_1L_2 ne joue aucun rôle.

2. Figure de diffraction à l'infini d'une fente rectangulaire

a) Expression de l'intensité diffractée par une fente rectangulaire



$$S(P) = S(\alpha, \beta) = AS_0 \iint_D \exp \left[-\frac{2i\pi}{\lambda_0} (\alpha x + \beta y) \right] dx dy$$

$$S(P) = S(\alpha, \beta) = AS_0 \int_{x=-a/2}^{x=a/2} \int_{y=-b/2}^{y=b/2} \exp \left[-\frac{2i\pi}{\lambda_0} (\alpha x + \beta y) \right] dx dy$$

$$S(P) = S(\alpha, \beta) = AS_0 \int_{x=-a/2}^{x=a/2} \exp \left[-\frac{2i\pi}{\lambda_0} \alpha x \right] dx \int_{y=-b/2}^{y=b/2} \exp \left[-\frac{2i\pi}{\lambda_0} \beta y \right] dy$$

$$S(\alpha, \beta) = AS_0 \frac{\lambda}{\pi\alpha} \sin \left(\frac{\pi\alpha a}{\lambda} \right) \frac{\lambda}{\pi\beta} \sin \left(\frac{\pi\beta b}{\lambda} \right)$$

On en déduit l'intensité diffractée dans la direction $\vec{u}(\alpha, \beta)$: $I(\alpha, \beta) = SS^*$

$$I(\alpha, \beta) = A^2 S_0^2 \left(\frac{\lambda}{\pi\alpha} \right)^2 \sin^2 \left(\frac{\pi\alpha a}{\lambda} \right) \left(\frac{\lambda}{\pi\beta} \right)^2 \sin^2 \left(\frac{\pi\beta b}{\lambda} \right)$$

On pose $\lim_{(\alpha, \beta) \rightarrow (0,0)} I(\alpha, \beta) = I_0 = A^2 S_0^2 a^2 b^2$, on a donc finalement :

$$I(\alpha, \beta) = I_0 \left(\frac{\sin \left(\frac{\pi\alpha a}{\lambda} \right)}{\frac{\pi\alpha a}{\lambda}} \right)^2 \left(\frac{\sin \left(\frac{\pi\beta b}{\lambda} \right)}{\frac{\pi\beta b}{\lambda}} \right)^2 = I_0 \operatorname{sinc}^2 \left(\frac{\pi\alpha a}{\lambda} \right) \operatorname{sinc}^2 \left(\frac{\pi\beta b}{\lambda} \right)$$

Etude sommaire :

I s'annule suivant x pour $\alpha = p \frac{\lambda}{a}$, avec $p \neq 0$
 y pour $\beta = p' \frac{\lambda}{b}$, avec $p' \neq 0$

$$\lim_{\alpha, \beta \rightarrow 0} I \approx I_0$$

On remarquera que la tache centrale est plus large dans la direction où la fente est la plus étroite.

b) Cas d'une fente fine

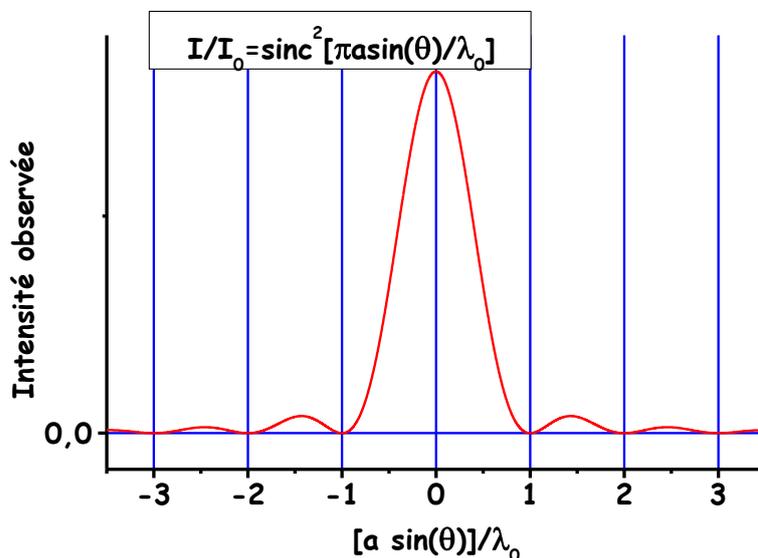
Il s'agit d'une fente rectangulaire pour laquelle la largeur a est très supérieure à la hauteur b . L'étude précédente nous montre que dans ces conditions les minima dans la direction Oy de la

hauteur b se resserrent lorsque b croit : $\frac{\lambda}{b} \rightarrow 0$

Toute l'intensité diffractée se retrouve sur l'axe Ox (direction de la largeur a)

Pour $b \gg a$ et $ab = C^{te}$ on aura pour l'intensité diffractée l'expression suivante :

$$I(\alpha) = I_0 \left(\frac{\sin\left(\frac{\pi\alpha a}{\lambda}\right)}{\frac{\pi\alpha a}{\lambda}} \right)^2 = I_0 \operatorname{sinc}^2\left(\frac{\pi\alpha a}{\lambda}\right)$$



3. Figure de diffraction à l'infini de systèmes de fentes parallèles

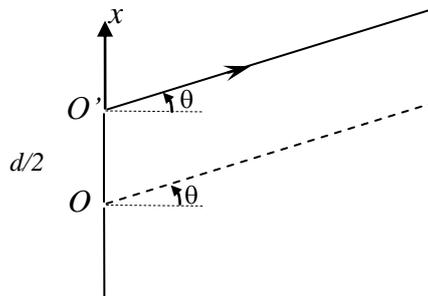
On envisage le cas de fentes fines.

L'amplitude diffractée par une telle fente s'écrira :

$$S(\alpha) = AS_0 ab \left(\frac{\sin\left(\frac{\pi\alpha a}{\lambda}\right)}{\frac{\pi\alpha a}{\lambda}} \right) = AS_0 ab \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi\alpha a}{\lambda}\right)$$

La vibration est en phase avec celle diffractée en O , centre de la fente.

a) Fente centrée en $x = d/2$



En considérant l'origine des phases en O , l'onde issue de O' est en avance de :

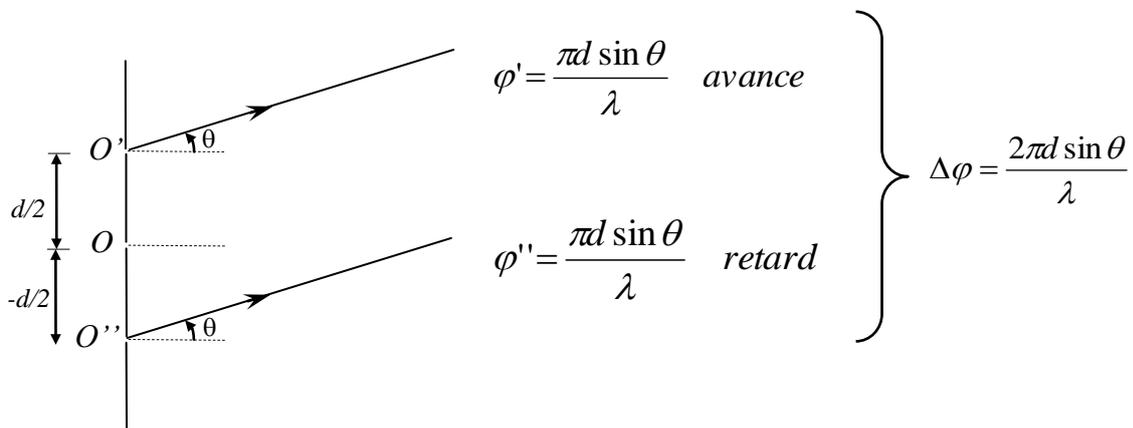
$$\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{d}{2} \sin \theta = \frac{\pi d \sin \theta}{\lambda}$$

$$S(\alpha) = AS_0 ab \left(\frac{\sin\left(\frac{\pi \alpha a}{\lambda}\right)}{\frac{\pi \alpha a}{\lambda}} \right) e^{-i\varphi} \text{ et l'intensité diffractée est donc : } I(\alpha) = I_0 \left(\frac{\sin\left(\frac{\pi \alpha a}{\lambda}\right)}{\frac{\pi \alpha a}{\lambda}} \right)^2$$

Elle est identique à celle calculée pour la même fente centrée en $x = 0$. la figure de diffraction est insensible à une translation de la fente dans son plan.

b) Bifente

Chaque fente a la largeur a , et la distance entre les fentes est d



En prenant pour origine des phases la phase de l'onde diffractée par O' , celle diffractée par O'' est en retard de $\Delta\varphi$. L'amplitude diffractée à l'infini par les deux fentes est donc :

$$S(\sin \theta) = AS_0 ab \left(\frac{\sin\left(\frac{\pi a \sin \theta}{\lambda}\right)}{\frac{\pi a \sin \theta}{\lambda}} \right) \left(1 + e^{i\Delta\varphi} \right)$$

L'intensité diffractée es donc : $I = SS^*$

$$I(\sin \theta) = 2I_0 \underbrace{\left(\frac{\sin\left(\frac{\pi a \sin \theta}{\lambda}\right)}{\frac{\pi a \sin \theta}{\lambda}} \right)^2}_{\mathcal{D}} \underbrace{(1 + \cos \Delta \varphi)}_{\mathcal{I}}$$

Cette intensité apparaît comme le produit de deux termes \mathcal{D} et \mathcal{I} qui sont :

\mathcal{D} : l'intensité diffractée par une fente

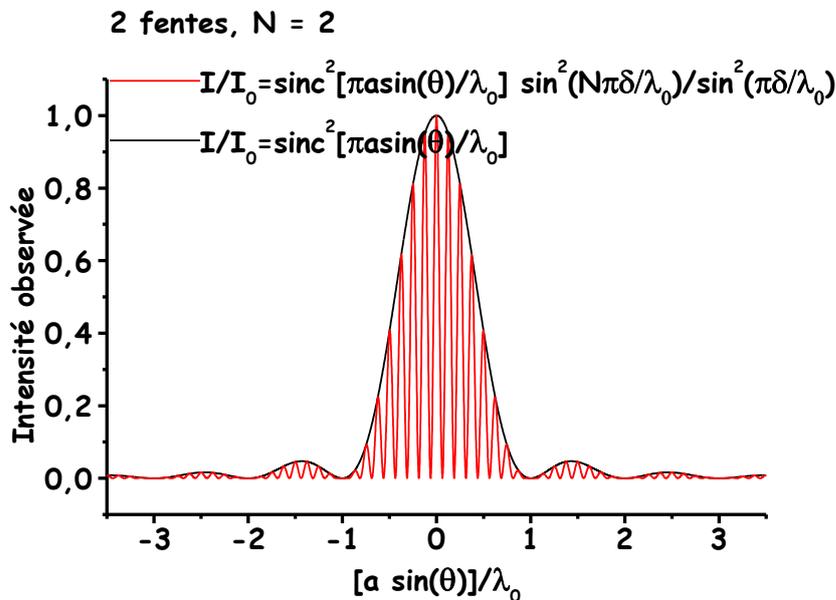
\mathcal{I} : l'intensité du phénomène d'interférence à deux sources.

En d'autres termes on obtient des franges d'interférences à l'intérieur de la figure de diffraction.

$\mathcal{D} = 0$ si $\sin \theta = p\lambda/a$ avec $p \neq 0$

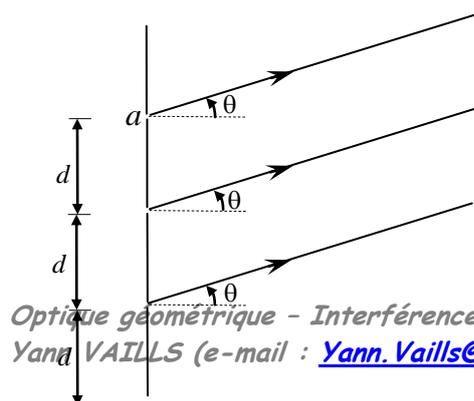
$\mathcal{I} = 0$ si $\Delta \varphi = (2p'+1)\pi$

Comme $d > a$ les franges d'interférence sont plus serrées que celles de la diffraction.



Ceci correspond aux fentes d'Young. On comprend ici le rôle joué par la largeur a des fentes : plus elles sont fines, plus on observe un grand nombre de franges.

c) Réseau de fentes



Il s'agit de calculer la figure de diffraction produite par plusieurs fentes fines parallèles de largeur a et distantes de d les unes des autres. Soit N le nombre de fentes.

Le retard d'une fente à l'autre pour une direction θ donnée est le même : $\Delta\varphi = \frac{2\pi d \sin \theta}{\lambda}$.

L'amplitude diffractée par un fente dans la direction θ est :

$$S(\alpha) = AS_0 ab \left(\frac{\sin\left(\frac{\pi\alpha a}{\lambda}\right)}{\frac{\pi\alpha a}{\lambda}} \right)$$

L'amplitude résultante est donc :

$$S(\sin \theta) = AS_0 ab \left(\frac{\sin\left(\frac{\pi a \sin \theta}{\lambda}\right)}{\frac{\pi a \sin \theta}{\lambda}} \right) \left(1 + e^{i\Delta\varphi} + \dots + e^{i(N-1)\Delta\varphi} \right)$$

On retrouve un calcul déjà effectué pour les interférences à N sources :

$$S(\sin \theta) = AS_0 ab \left(\frac{\sin\left(\frac{\pi a \sin \theta}{\lambda}\right)}{\frac{\pi a \sin \theta}{\lambda}} \right) e^{i\frac{N-1}{2}\Delta\varphi} \left[\frac{\sin \frac{N\Delta\varphi}{2}}{\sin \frac{\Delta\varphi}{2}} \right]$$

L'intensité de la figure de diffraction est donc :

$$I(\sin \theta) = I_0 \underbrace{\left(\frac{\sin\left(\frac{\pi a \sin \theta}{\lambda}\right)}{\frac{\pi a \sin \theta}{\lambda}} \right)^2}_{\mathcal{D}} \underbrace{\left[\frac{\sin \frac{N\pi d \sin \theta}{\lambda}}{\sin \frac{\pi d \sin \theta}{\lambda}} \right]^2}_{\mathcal{J}}$$

Si le nombre de fentes N est grand, la figure consistera en une série de franges brillantes étroites correspondant aux maxima principaux de la figure d'interférence (partie \mathcal{J})

Equidistance : $d \sin \theta = n\lambda_0$ soit, $\sin \theta = n\lambda_0/d$

Les intensités de ces maxima étant modulés par la figure de diffraction d'une fente (\mathcal{D})

$\mathcal{D} = 0$ si $a \sin \theta = p\lambda$ avec $p \neq 0$

