



# OPTIQUE DE FOURIER : IMAGES ET SPECTROSCOPIE

Yann VAILLS  
Professeur

*Optique de Fourier et formation des images*

Yann VAILLS – date de dernière mise à jour : 06/09/2019

Ce cours est disponible à l'adresse suivante : <http://www.cemhti.cnrs-orleans.fr/?nom=Vaills>

## Bibliographie

- Optics, Eugene Hecht, Fourth edition - 2002 - International Edition, Addison Wesley
- Introduction to Fourier Optics, Joseph W. Goodman, Third edition - 2004 - Roberts & Company Publishers
- Optique, fondements et applications, José-Philippe Perez - 6<sup>ème</sup> édition - 2000 - Masson sciences - DUNOD
- Optique cohérente, fondements et applications, Wener Lauterborn, Thomas Kurz et Martin Wiesenfeld - 1997 - Masson
- Optique, formation et traitement des images, 1972 M. Françon Masson et compagny
- Séparation des radiations par les filtres optiques, 1984, M. Françon Masson et compagny
- Engeneering Optics, K. Iizuka, Springer-Verlag
- Coherent Optics, Fundamentals and Applications, W. Lauterborn, Springer-Verlag

# Chapitre 1 : INTERFÉRENCES

## I. Généralités

## II. Superposition d'ondes lumineuses

1. Superposition de 2 ondes sinusoïdales planes
2. Addition de 2 ondes lumineuses planes sinusoïdales
3. Franges d'interférence
  - a. Caractéristiques
  - b. Degré de cohérence spatiale
  - c. Degré de cohérence temporelle

## III. Production d'interférences

1. Division du front d'onde
2. Division d'amplitude
  - a. Calcul de la différence de marche
  - b. Franges d'interférence

## IV. Interférométrie

1. Principe des méthodes
2. Interféromètres
  - a. Principes de base
  - b. Interféromètre à faisceaux séparés
  - c. Autres exemples de faisceaux séparés

d. Ondes multiples : Fabry-Pérot - exemple d'application : étude de raies fines

## V. Exemples d'applications : Analyse spectrale

1. Spectromètre par Transformée de Fourier (Michelson TF)
2. Spectromètre Pérot-Fabry
- 3) Interférométrie de speckle

## VI. Composants optiques interférentiels

1. Couches minces : antireflets - filtres
2. Filtres interférentiels
3. Cavités résonantes pour laser
4. Composants avec milieux anisotropes : polariseurs - compensateurs

# Chapitre 2 : DIFFRACTION

## I. Diffraction par un écran

### 1. Amplitude diffractée

#### *a. Principe de Huygens*

#### *b. Principe de Huygens-Fresnel*

### 2. Diffraction de Fresnel

### 3. Diffraction à l'infini ou diffraction de Fraunhofer

#### *a. Approximation*

#### *b. Dans l'approximation paraxiale on a*

#### *c. Exemples de diffraction à l'infini*

## II. Transformation de Fourier et diffraction de Fraunhofer

### 1. Propriétés de la TF

### 2. Produit de convolution :

### 3. Corrélation - Autocorrélation

### 4. Double TF :

### 5. Les distributions

a. Porte rectangulaire de largeur  $a$  :

b. Triangle de base  $2a$  :

c. Distribution de Dirac :  $\delta(x)$

d. Peigne de Dirac :

## 6. Transformation de Fourier 2 D

## 7. Utilisation des distribution pour les calculs de diffraction

a. Pupilles simples

b. Distribution de trous infiniment fins

c. Pupilles composées

## III. Applications à la spectroscopie

1. Fonction diffraction : réseau limité de fentes

2. Utilisation du réseau en spectroscopie

# Chapitre 3 : FORMATION DES IMAGES

## I. Lentilles et optique ondulatoire

1. Modification de la phase introduite par une lentille

2. Lentille et diffraction de la lumière

*a. Diffraction à la distance  $z$  (Fresnel)*

*b. Diaphragme sur la lentille*

*c. Diaphragme dans le plan focal objet de la lentille*

3. Montages optiques

## II. Formation des images par un système optique

1. Rôle de la nature de l'éclairage

*a. Eclairage cohérent*

*b. Eclairage incohérent*

*Eclairage en lumière cohérente*

*3. Eclairage en lumière incohérente*

## III. Filtrage optique : montages optiques pour filtrage des images

1. Montage à 1 lentille : action d'un masque

*i) Lumière cohérente*

*ii) Lumière incohérente*

2. Montage à 2 lentilles (type « 4f »)

Exemple 1: filtre passe-haut :

- i) Strioscopie*
- ii) Contraste de phase*

*Exemple 2: filtre passe-bas*

## IV. Principe du traitement numérique de l'image optique

### 1. Opérations de base pour le « calcul optique »

- Addition - soustraction
- Multiplication
- Division
- Moyenne arithmétique

### 2. Filtrage optique d'une image

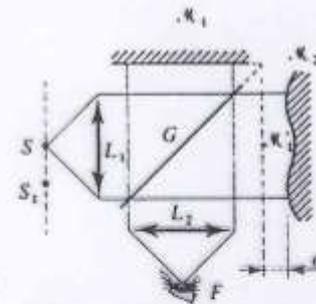
*a. Exemple 1 : principe du détramage (filtrage passe-bas)*

### **Exemple 2 : filtrage adapté (index matching)**

# Chapitre 1 : Interférences

## I. Généralités

Expériences d'interférences



3.5. Observation des franges d'égal épaisseur avec un interféromètre de Michelson.

3.6. Franges d'interférences observées dans l'expérience de la figure 3.5.



*Optique de Fourier et formation des images*

Yann VAILLS – date de dernière mise à jour : 06/09/2019

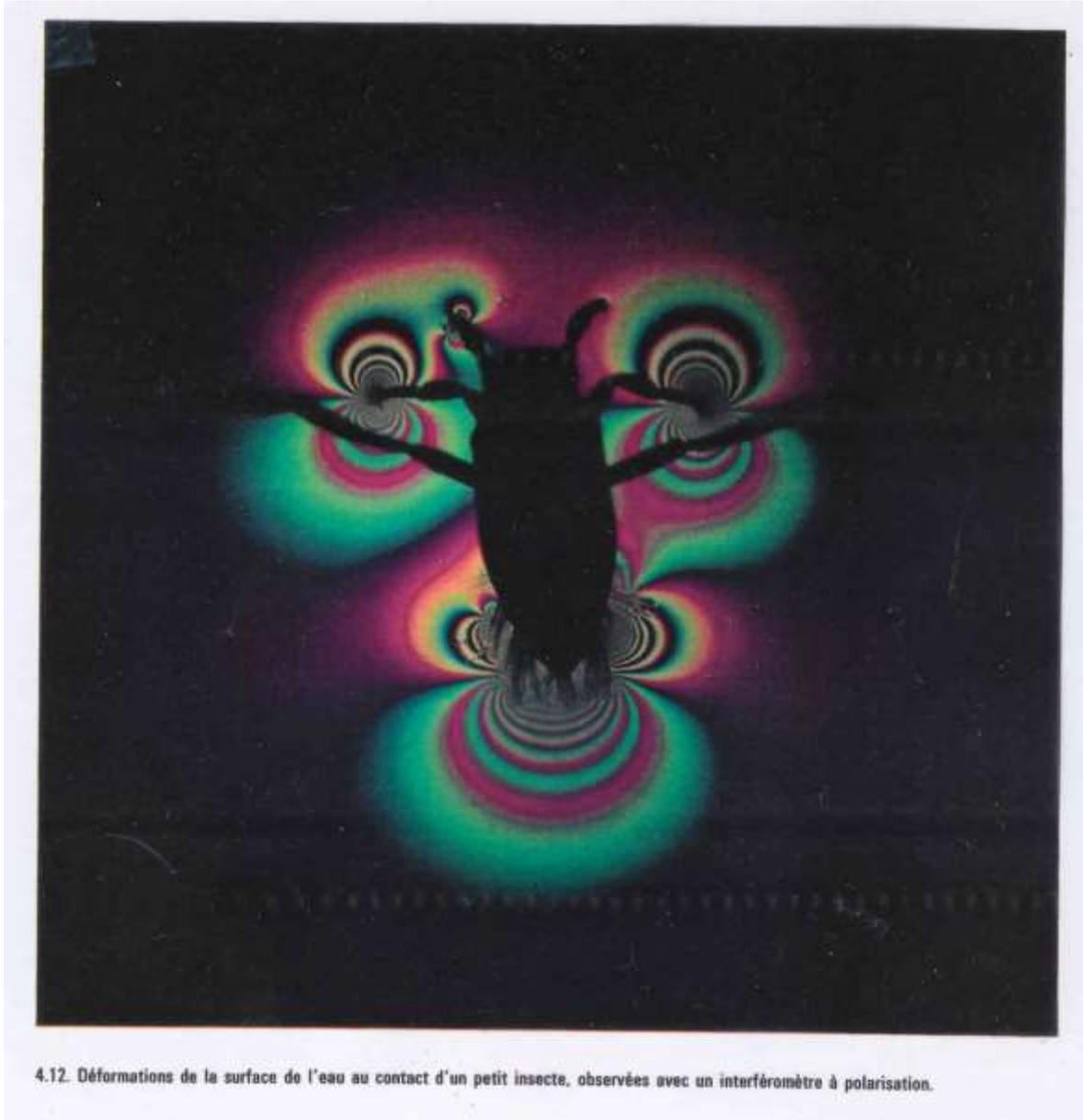
Ce cours est disponible à l'adresse suivante : <http://www.cemhti.cnrs-orleans.fr/?nom=Vaills>

**Franges** : Modification du chemin optique

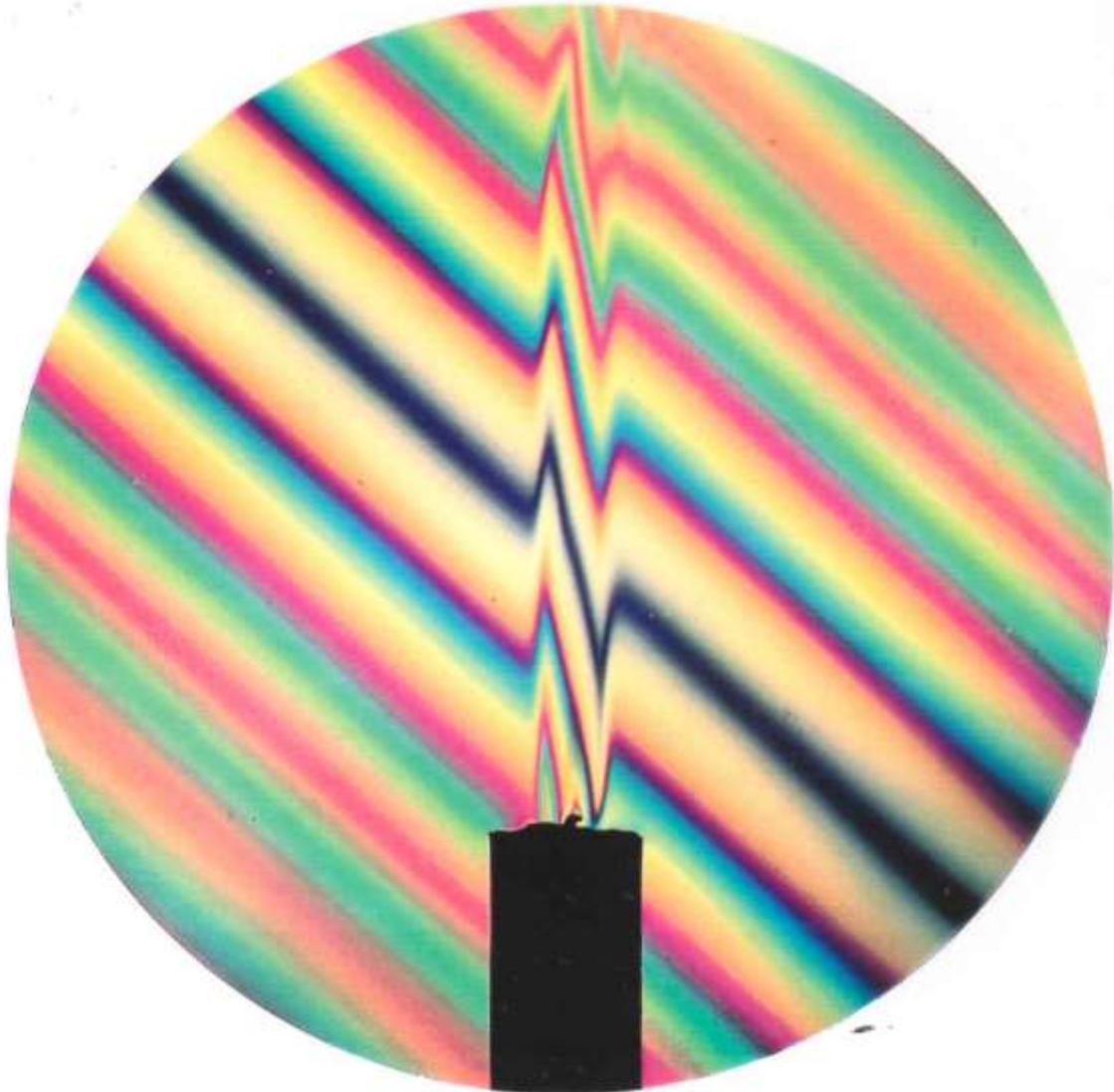
Entre deux points séparés par une distance infiniment petit  $ds$ , l'indice de réfraction  $n(s)$  peut être considéré comme constant. On appelle chemin optique entre ces deux points, et on note  $dL$  le produit de la distance entre ces deux points par la valeur de l'indice de réfraction :  $dL = n(s).ds$

Lorsque deux points A et B sont distants à l'échelle des variations d'indice, on aura :

$$L_{AB} = \int_A^B n(s).ds$$

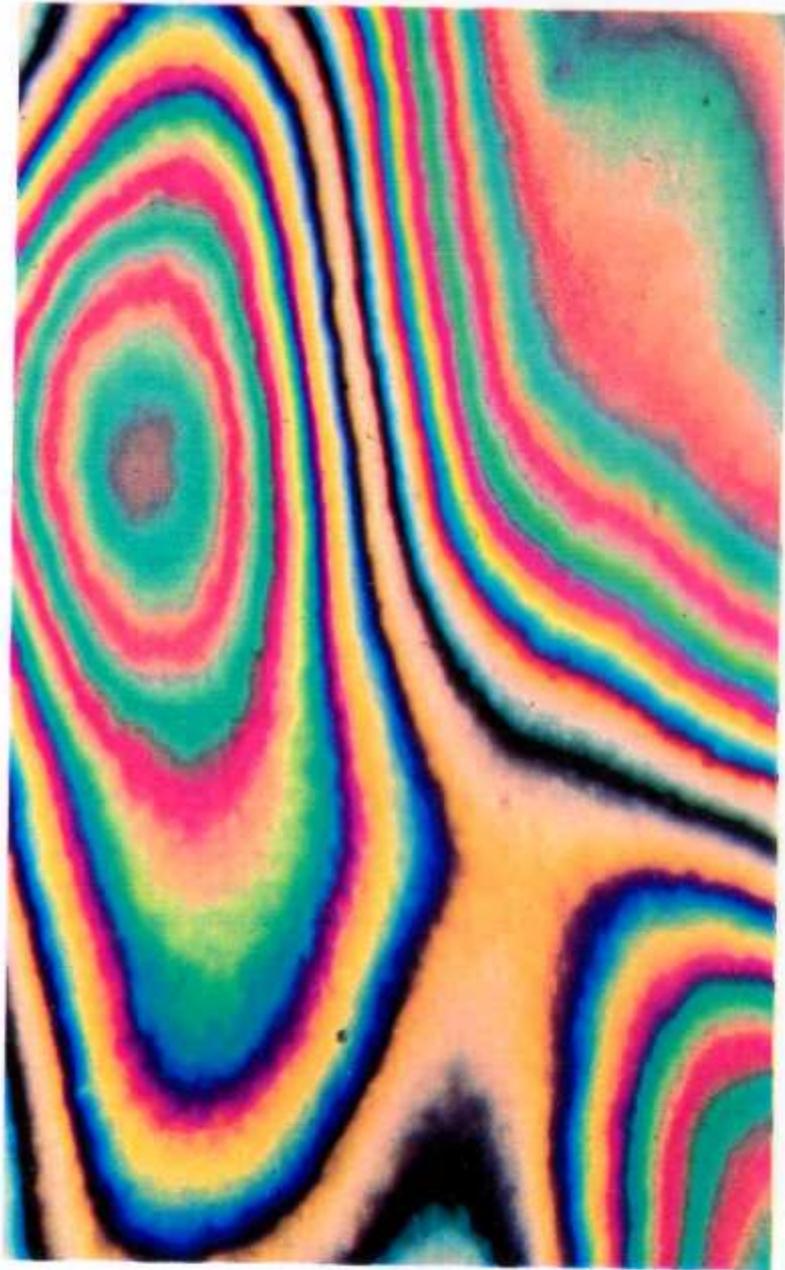


4.12. Déformations de la surface de l'eau au contact d'un petit insecte, observées avec un interféromètre à polarisation.



4.11. Un réglage convenable de l'interféromètre permet d'observer des franges dont les déformations mettent en évidence les variations de température au voisinage de la bougie.

## Effets chromatiques



3.9. Observation des franges d'interférences lorsque la source lumineuse émet de la lumière blanche.

*Optique de Fourier et formation des images*

*Yann VAILLS – date de dernière mise à jour : 06/09/2019*

*Ce cours est disponible à l'adresse suivante : <http://www.cemhti.cnrs-orleans.fr/?nom=Vaills>*

## II. Superposition d'ondes lumineuses

### 1. Superposition de 2 ondes sinusoïdales planes

$$\tilde{a} = a_0 e^{-i[(\omega_1 t - \vec{k}_1 \vec{r}) + \Phi_1]}$$

$$\tilde{b} = b_0 e^{-i[(\omega_2 t - \vec{k}_2 \vec{r}) + \Phi_2]}$$

$$\tilde{s} = \tilde{a} + \tilde{b}$$

la détection du signal étant énergétique on travaillera avec l'intensité :

$$I = \frac{1}{2} s s^* \propto |s|^2$$

$$|s|^2 = a_0^2 + b_0^2 + a_0 b_0 e^{-i[(\omega_1 - \omega_2)t - (\vec{k}_1 - \vec{k}_2)\vec{r} + \Phi_1 - \Phi_2]} + a_0 b_0 e^{i[(\omega_1 - \omega_2)t - (\vec{k}_1 - \vec{k}_2)\vec{r} + \Phi_1 - \Phi_2]}$$

$$|s|^2 = a_0^2 + b_0^2 + 2a_0 b_0 \cos[(\omega_1 - \omega_2)t - (\vec{k}_1 - \vec{k}_2)\vec{r} + \Phi_1 - \Phi_2]$$

les fréquences des ondes lumineuses visibles (4 à 7  $10^{14}$  Hz) étant grandes devant les fréquences caractéristiques des systèmes de détection (de l'ordre de 1 GHz au mieux, mais plus classiquement 1 MHz), sur la durée de la mesure on observe la valeur moyenne dans le temps de l'intensité lumineuse :  $\langle |s|^2 \rangle_t$

Concrètement, dès que  $\Delta t$ , la durée d'observation du phénomène (durée de la mesure) est supérieure au temps caractéristique  $\Delta T$  donné par :  $\omega_1 - \omega_2 = \frac{2\pi}{\Delta T}$

la valeur moyenne du cosinus étant nulle, il reste  $s^2 = a_0^2 + b_0^2$

Cette intensité correspond à une valeur constante dans le temps et dans l'espace. On observe dans ce cas un éclairage uniforme sur la surface détectrice de l'intensité lumineuse (on n'observe pas de phénomène d'interférence).

Si  $\omega_1 = \omega_2$  alors :

$$|s|^2 = a_0^2 + b_0^2 + 2a_0 b_0 \cos[(\vec{k}_1 - \vec{k}_2)\vec{r} + \Phi_1 - \Phi_2]$$

et il y a interférence.

### a. Fréquence

En lumière visible on aura par exemple :  $\lambda = 500 \text{ nm} \Rightarrow \nu = c/\lambda = 3.10^8/5.10^{-7} = 0,6.10^{15} \text{ s}^{-1}$ , soit  $\omega = 4.10^{15} \text{ rd.s}^{-1}$

En pratique la durée de la mesure  $\Delta t \gg \Delta T = 2\pi/(\omega_1 - \omega_2)$

Or le temps nécessaire pour une mesure est :  $\Delta t_{\text{mesure}} \# 10^{-6} \text{ s}$  ; pour que la valeur moyenne du cosinus dans le temps ne soit pas nulle il faut donc que  $\Delta T > 10^{-6} \text{ s}$ , soit  $\omega_1 - \omega_2 < 6.10^6 \text{ s}^{-1}$ , donc  $\omega_1 - \omega_2 \ll \omega$

On voit donc qu'une expérience d'interférence entre ondes lumineuses nécessite en pratique que ces ondes soient de même fréquence

### b. Nature vectorielle des ondes lumineuses

Intensité lumineuse résultant de la somme de 2 ondes dont les directions des polarisations font un angle  $\theta$  :

$$\tilde{\vec{E}}_1(\vec{r}, t) = \vec{E}_{01} e^{-i[\omega t - \vec{k}_1 \cdot \vec{r} - \varphi_1(t)]}$$

$$\tilde{\vec{E}}_2(\vec{r}, t) = \vec{E}_{02} e^{-i[\omega t - \vec{k}_2 \cdot \vec{r} - \varphi_2(t)]}$$

$$I = \frac{1}{2} \tilde{\vec{E}} \cdot \tilde{\vec{E}}^*$$

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \langle \cos \theta \rangle_t \langle \cos[(\vec{k}_1 - \vec{k}_2) \cdot \vec{r} + \varphi_1(t) - \varphi_2(t)] \rangle_t$$

$$I = I_1 + I_2 + \mathbf{Int}$$

C'est la présence du terme **Int** qui permet de mettre en évidence le phénomène d'interférence.

$\mathbf{Int} = 0 \Rightarrow I = I_1 + I_2$  : c'est le cas général des sources indépendantes

$\mathbf{Int} \neq 0$  : il y a interférences, ce qui correspond au respect de certaines conditions.

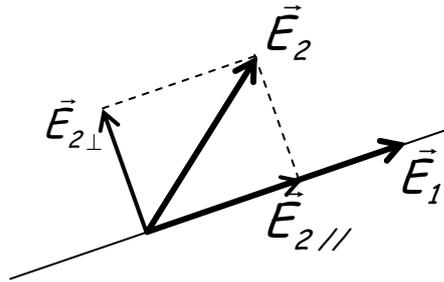
Conditions nécessaires pour l'observation d'interférences :

*Optique de Fourier et formation des images*

Yann VAILLS – date de dernière mise à jour : 06/09/2019

Ce cours est disponible à l'adresse suivante : <http://www.cemhti.cnrs-orleans.fr/?nom=Vaills>

- $\vec{E}_1$  et  $\vec{E}_2$  ne doivent pas être perpendiculaires entre eux



$$I \propto (\vec{E}_1 + \vec{E}_{2//} + \vec{E}_{2\perp}) \cdot (\vec{E}_1^* + \vec{E}_{2//}^* + \vec{E}_{2\perp}^*)$$

$$I = I_1 + I_{2//} + I_{2\perp} + I_{int}$$

Le calcul de la composante interférentielle sera réduit aux composantes // de  $\vec{E}_1$  et  $\vec{E}_2$ , ce sera donc un calcul scalaire

- $\left\langle \underbrace{\cos \left\{ (\vec{k}_1 - \vec{k}_2) \cdot \vec{r} + [\varphi_1(t) - \varphi_2(t)] \right\}}_{\text{terme de cohérence}} \right\rangle_t \neq 0$  si  $\varphi_1(t) - \varphi_2(t) = 0$

En pratique on obtient  $\varphi_1(t) - \varphi_2(t) = 0$  par dédoublement d'une source unique.

L'intensité dans le cas d'interférence entre deux sources est donc :

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \Delta\varphi_{12}$$

## 2. Franges d'interférence

### a. Caractéristiques

L'intensité lumineuse de la figure d'interférence varie d'un point à l'autre à cause de l'existence de  $\Delta\varphi$ .

On dira que les 2 sources  $S_1$  et  $S_2$  donnant les signaux d'intensités  $I_1$  et  $I_2$  sont cohérentes entre elles si :

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \Delta\varphi_{12} \quad \text{avec} \quad \Delta\varphi_{12} = \varphi_2 - \varphi_1 = (\vec{k}_2 - \vec{k}_1) \cdot \vec{r}$$

c'est-à-dire si  $\Delta\varphi_{12}$  est indépendant du temps.

L'intensité lumineuse est maximale pour  $\Delta\varphi_{12} = 2q\pi$  avec  $q$  entier, on a une frange brillante

L'intensité lumineuse est minimale pour  $\Delta\varphi_{12} = (2q+1)\pi$ , avec  $q$  entier on a une frange sombre

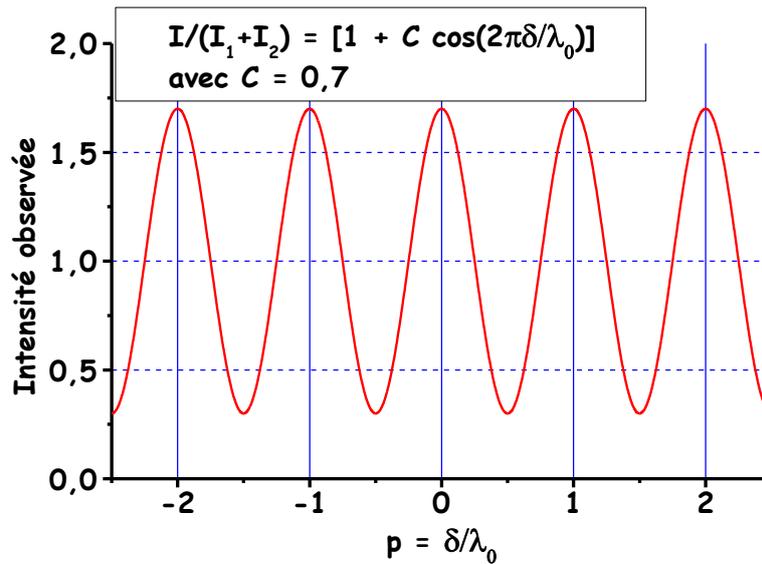
- Ordre d'interférence : on pose  $\Delta\varphi_{12} = 2\pi p$ ,  $p$  est l'ordre d'interférence. Une frange brillante correspond à un ensemble de points pour lesquels  $p$  a une valeur déterminée et entière.
- Contraste (ou visibilité)

$$\text{On pose : } C = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}} = \frac{2\sqrt{I_1 I_2}}{I_1 + I_2} \quad 0 \leq C \leq 1$$

$$\text{On a donc : } I = (I_1 + I_2)[1 + C \cos \Delta\varphi]$$

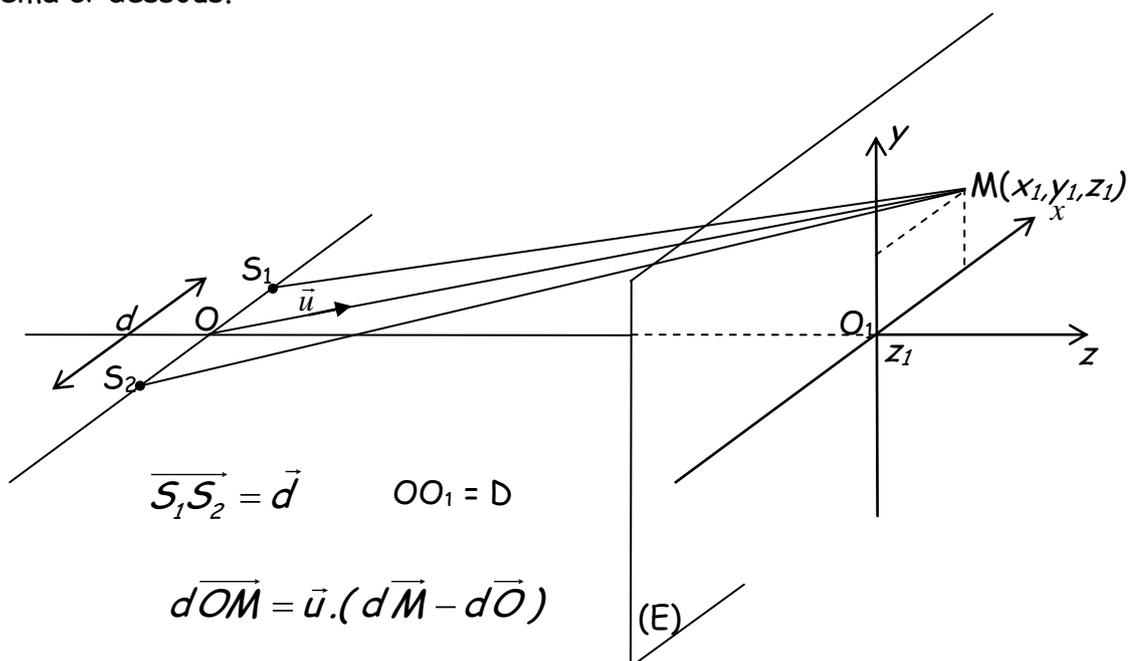
$$I = (I_1 + I_2) \left[ 1 + C \cos \frac{2\pi(\delta)}{\lambda_0} \right]$$

où  $(\delta) = n \Delta l$  le chemin optique



- Interfrange

Un système donnant lieu à l'interférence de 2 ondes peut se réduire au schéma ci-dessous.



Les calculs précédents (en particulier celui de  $\Delta\varphi$ ) imposent d'envisager l'utilisation de sources cohérentes  $S_1$  et  $S_2$ , d'ondes quasiplanes dont les plans d'ondes sont quasiparallèles, ce qui impose que  $\vec{r}_1$  et  $\vec{r}_2$  soient sensiblement parallèles, soit encore :  $D \gg d$

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda_0} n(r_2 - r_1)$$

Les lieux des points tels que  $\Delta\varphi = C^{te}$  (correspondant à la même intensité lumineuse) sont des hyperboloïdes de foyers  $S_1$  et  $S_2$ . L'intersection de ces surfaces avec le plan d'observation (E) donne les franges d'interférence.

Un cas fréquemment envisagé est celui où l'écran est parallèle à la direction des sources :

$$\delta = (S_2M) - (S_1M) = -n\vec{u} \cdot \overrightarrow{S_1S_2}$$

$$\vec{u} = \frac{\overrightarrow{OM}}{\|\overrightarrow{OM}\|} = \frac{x\vec{i} + y\vec{j} + D\vec{k}}{(x^2 + y^2 + D^2)^{1/2}}, \quad \overrightarrow{S_1S_2} = -d\vec{i}$$

$$\delta = \frac{ndx}{(x^2 + y^2 + D^2)^{1/2}}$$

dans le cas où  $|x| \ll D$  et  $|y| \ll D$  on a :

$$\delta = \frac{ndx}{D} \text{ et}$$

$$I = (I_1 + I_2) \left[ 1 + C \cos \frac{2\pi ndx}{\lambda_0 D} \right]$$

Les franges d'interférences ( $I = C^{te}$ ) sont les droites  $x = C^{te}$ , elles sont donc perpendiculaires à la direction  $\overrightarrow{S_1S_2}$

La distance entre deux points homologues est appelée interfrange  $i_0$ , elle correspond à

$$\frac{2\pi ndi_0}{\lambda_0 D} = 2\pi, \quad \boxed{i_0 = \frac{\lambda_0 D}{nd}}$$

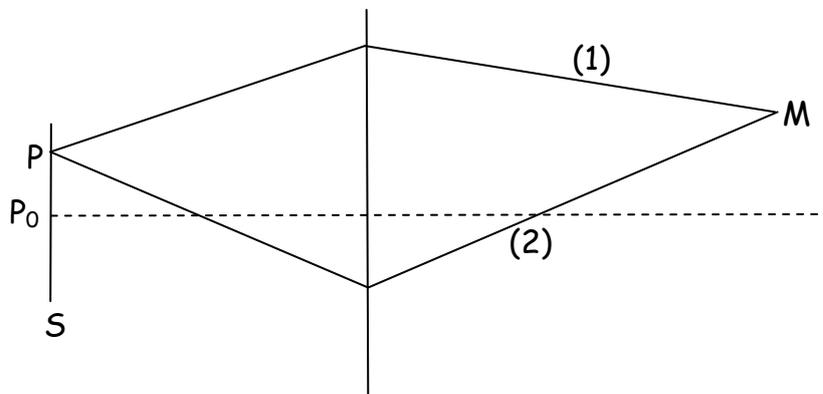
Exemple :  $D = 1\text{m}$      $d = 0,5 \text{ mm}$      $\lambda_0 = 500 \text{ nm}$      $n = 1$  (air) alors  $i_0 = 1 \text{ mm}$

## b. Degré de cohérence spatiale

On considère une source lumineuse homogène monochromatique étendue d'aire  $S$ . L'intensité lumineuse d'un élément de surface  $dS$  autour d'un point  $P$  de la source peut s'écrire en fonction de la luminance  $J(P)$  de celle-ci (intensité par unité de surface) :

$$dI(P) = J(P)dS$$

L'observation se fait en un point  $M$  défini par le schéma ci-dessous, où interfèrent les rayons lumineux ayant suivi les parcours (1) et (2)



L'intensité en  $M$  due à l'élément de surface  $dS$  de la source centré en  $P$  est donnée par :

$$dI(M) = 2dI(P)[1 + \cos \varphi_{12}(P)] \text{ où } \varphi_{12}(P) = \frac{2\pi}{\lambda_0}(\delta_{12}(P))$$

L'intensité totale observée en  $M$  est :

$$I(M) = 2 \iint_{(S)} J(P)dS + 2 \iint_{(S)} J(P) \cos \varphi_{12}(P)dS$$

avec  $I_0 = \iint_{(S)} J(P)dS$  il vient :

$$I(M) = 2I_0 \left[ 1 + \frac{\iint_{(S)} J(P) \cos \varphi_{12}(P)dS}{\iint_{(S)} J(P)dS} \right]$$

*Optique de Fourier et formation des images*

Yann VAILLS – date de dernière mise à jour : 06/09/2019

Ce cours est disponible à l'adresse suivante : <http://www.cemhti.cnrs-orleans.fr/?nom=Vaills>

On pose  $\varphi_{12}(P) = \bar{\varphi}_0 + \Delta\varphi(P)$ , avec  $\bar{\varphi}_0 = \varphi(P_0)$ , comme par ailleurs  $I(M)$  est réelle et il vient :

$$I(M) = 2I_0 \left[ 1 + \frac{\operatorname{Re} \left( \iint_{(S)} J(P) e^{i\varphi_{12}(P)} dS \right)}{\iint_{(S)} J(P) dS} \right] = 2I_0 \left[ 1 + \frac{\operatorname{Re} \left( e^{-i\bar{\varphi}_0} \iint_{(S)} J(P) e^{-i\Delta\varphi(P)} dS \right)}{\iint_{(S)} J(P) dS} \right]$$

$$\text{soit : } I(M) = 2I_0 \left[ 1 + \frac{\operatorname{Re} [e^{-i\bar{\varphi}_0} \operatorname{TF}(J(P))] }{\iint_{(S)} J(P) dS} \right] = 2I_0 \left[ 1 + \frac{\operatorname{Re} [e^{-i\bar{\varphi}_0} |\operatorname{TF}(J(P))| e^{-i\varphi_s} ] }{\iint_{(S)} J(P) dS} \right]$$

$$I(M) = 2I_0 \left[ 1 + \frac{\cos(\bar{\varphi}_0 + \varphi_s) |\operatorname{TF}(J(P))| }{\iint_{(S)} J(P) dS} \right]$$

$$\boxed{I(M) = 2I_0 [1 + |\gamma_s| \cos(\bar{\varphi}_0 + \varphi_s)]}$$

$|\gamma_s|$  est le module de la transformée de Fourier de l'intensité spatiale normalisée de la source. C'est le **degré de cohérence spatiale**

$$\boxed{|\gamma_s| = \left| \operatorname{TF} \left( \frac{J(P)}{I_0} \right) \right|} \quad \text{relation de Van Cittert - Zernike.}$$

L'annulation de  $\gamma_s$  détermine la dimension maximale de la source susceptible de donner des interférences.

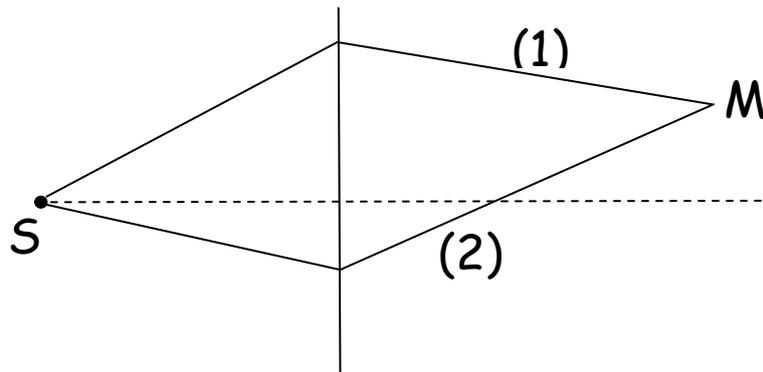
### **c. Degré de cohérence temporelle**

*Optique de Fourier et formation des images*

Yann VAILLS – date de dernière mise à jour : 06/09/2019

Ce cours est disponible à l'adresse suivante : <http://www.cemhti.cnrs-orleans.fr/?nom=Vaills>

On considère une source lumineuse ponctuelle et non monochromatique.



Arrivent alors en un point M des vibrations issues d'un même point et qui présentent une différence de marche  $\delta$ . Ceci correspond à une différence de durée de propagation égale à :  $\tau = \frac{\delta}{c}$ . Les vibrations qui interfèrent en M ont été émises à des instants  $t$  et  $t + \tau$ .

Dans quelle mesure peut-on les considérer comme cohérentes (susceptibles d'interférer) ?

L'intensité lumineuse à fréquence  $\nu$  en un point M s'écrit :

$$dI(\nu) = J(\nu)d\nu$$

où  $J(\nu)$  représente la densité spectrale d'intensité ou luminance spectrale.

Dans la source l'intensité se répartie sur une bande de fréquence  $\Delta\nu$  autour de  $\nu_0$ . Les différentes fréquences sont incohérentes au sens où il ne peut y avoir interférences entre des ondes de fréquences différentes. Pour une onde les intensités des différentes fréquences s'ajoutent et l'intensité totale observée en M se met sous la forme suivante :

$$I(M) = \int_{\nu_0 - \Delta\nu/2}^{\nu_0 + \Delta\nu/2} J(\nu)d\nu$$

Pour des raisons pratiques mathématiques on pourra étendre cette intégrale aux domaines où la densité est nulle et écrire :

$$I(\mathcal{M}) = \int_{-\infty}^{+\infty} J(\nu) d\nu$$

Pour un dispositif d'interférence à 2 ondes chaque composante à la fréquence  $\nu$  donne en  $\mathcal{M}$  la contribution suivante:

$$dI(\mathcal{M}) = 2J(\nu)(1 + \cos \varphi_{12})d\nu$$

$$\text{où } \varphi_{12} = \frac{2\pi(\delta)}{c} \nu = 2\pi p_\nu \text{ avec } \nu = \bar{\nu}_0 + \nu' \text{ et avec } \bar{\varphi}_0 = \frac{2\pi(\delta)}{c} \bar{\nu}_0$$

$$I(\mathcal{M}) = 2 \int_{-\infty}^{+\infty} J(\nu') \left[ 1 + \cos \left( \bar{\varphi}_0 + 2\pi \frac{(\delta)}{c} \nu' \right) \right] d\nu'$$

$$\text{or } I(\mathcal{M}) \text{ est réelle donc : } I(\mathcal{M}) = 2 \operatorname{Re} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} J(\nu') \left[ 1 + e^{-i \left( \bar{\varphi}_0 + 2\pi \frac{(\delta)}{c} \nu' \right)} \right] d\nu' \right\}$$

$$\text{soit : } I(\mathcal{M}) = 2 \left[ I_0 + \operatorname{Re} \left\{ e^{-i\bar{\varphi}_0} \int_{-\infty}^{+\infty} J(\nu') e^{-i2\pi \frac{(\delta)}{c} \nu'} d\nu' \right\} \right]$$

$$\text{et } I(\mathcal{M}) = 2 \left[ I_0 + \operatorname{Re} \left\{ e^{-i\bar{\varphi}_0} \operatorname{TF}(J(\nu)) \right\} \right] = 2 \left[ I_0 + \operatorname{Re} \left\{ e^{-i\bar{\varphi}_0} | \operatorname{TF}(J(\nu)) | e^{-i\varphi_\tau} \right\} \right]$$

$$\boxed{I(\mathcal{M}) = 2I_0 \left[ 1 + |\Gamma_\tau| \cos(\bar{\varphi}_0 + \varphi_\tau) \right]}$$

Le caractère non monochromatique de la lumière diminue le contraste des franges par un facteur  $|\Gamma_\tau|$  appelé **degré de cohérence temporelle**. C'est le module de la transformée de Fourier de la densité spectrale normalisée de la source :

$$\boxed{|\Gamma_\tau| = \left| \operatorname{TF} \left( \frac{J(\nu)}{I_0} \right) \right|}$$

relation de Wiener - Kintchine

*Optique de Fourier et formation des images*

Yann VAILLS – date de dernière mise à jour : 06/09/2019

Ce cours est disponible à l'adresse suivante : <http://www.cemhti.cnrs-orleans.fr/?nom=Vails>

$\Gamma_T$  est fonction de la largeur spectrale  $\Delta\nu$ .

La valeur pour laquelle  $\Gamma_T$  s'annule fixe la différence de marche maximale entre les ondes qui donnent les interférences.

Exemples :

$$\mathcal{J}(\nu) = \Pi\left(\frac{\nu}{\Delta\nu}\right)$$

$$|\Gamma_T| = \Delta\nu |\text{sinc}(\pi\tau\Delta\nu)|$$

le contraste des franges s'annule (les franges disparaissent) si  $\tau\Delta\nu = 1$ , soit pour une différence de marche  $\delta_0 = c\tau = \frac{c}{\Delta\nu} = L_c$ ,  $L_c$  est **la longueur de cohérence** de la source.

La connaissance de  $L_c$  est importante (et donc sa détermination). Elle fixe par exemple les conditions expérimentales susceptibles de permettre d'obtenir des interférences : il faudra que le dispositif n'introduise pas une différence de marche supérieure à  $L_c$ .

$L_c$  varie beaucoup avec les sources :

- *Source classique banale* : lampe spectrale  $\frac{\Delta\nu}{\nu} = 10^{-3}$  (6 Å séparent les deux composantes du doublet du sodium  $D_1 = 589,6$  nm et  $D_2 = 589,0$  nm)  
 $\nu = c/\lambda = 3 \cdot 10^8 / 6 \cdot 10^{-7} = 5 \cdot 10^{14} \text{ s}^{-1}$  et  $\Delta\nu = \nu (\Delta\lambda/\lambda) = 5 \cdot 10^{11} \text{ s}^{-1}$   
d'où  $L_c = 3 \cdot 10^8 / 5 \cdot 10^{11} = 0,6$  mm

- *Raie spectrale*  $\Delta\lambda = 0,1$  Å pour  $\lambda = 6\,000$  Å (où  $\Delta\lambda$  représente la largeur de la raie à mi-hauteur)  
 $\Delta\nu = \nu (\Delta\lambda/\lambda) = 5 \cdot 10^{14} \cdot 0,1 / 6\,000$  et  $L_c = c/\Delta\nu = 3$  cm

- *Lumière blanche* :  $\Delta\nu = 3 \cdot 10^{14} \text{ s}^{-1}$   $L_c = c/\Delta\nu = 10^6 \text{ m} = 1 \mu\text{m}$   
Les franges pourront apparaître dans les dispositifs de type lames minces

- *Laser* :  $\Delta\nu$  peut être « petit » et  $L_c$  de l'ordre du mètre, voire beaucoup plus dans le cas de lasers monomodes stabilisés en fréquence  
*Laser argon ionisé multimodes*  $L_c = c/\Delta\nu = c/6 \cdot 10^9 = 4,7$  cm  
*Laser argon ionisé monomode*  $L_c = c/\Delta\nu = c/3 \cdot 10^6 = 100$  m

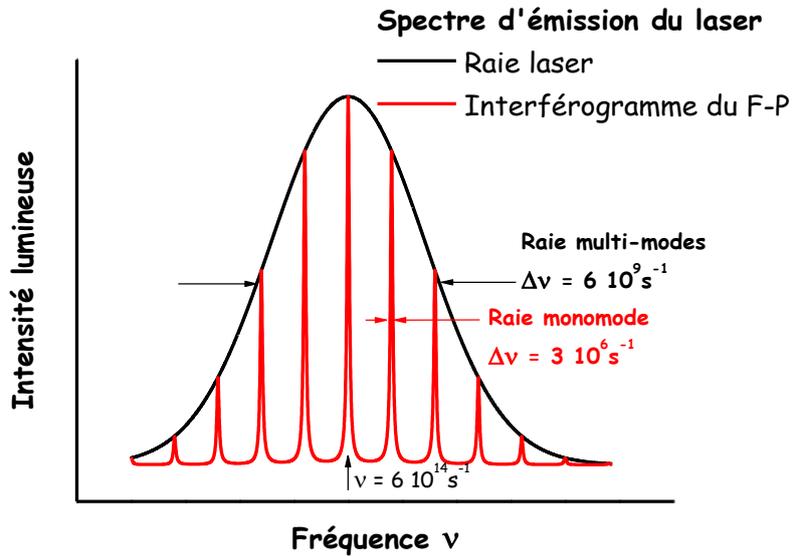
*Optique de Fourier et formation des images*

Yann VAILLS – date de dernière mise à jour : 06/09/2019

Ce cours est disponible à l'adresse suivante : <http://www.cemhti.cnrs-orleans.fr/?nom=Vaills>

(données « COHERENT »)

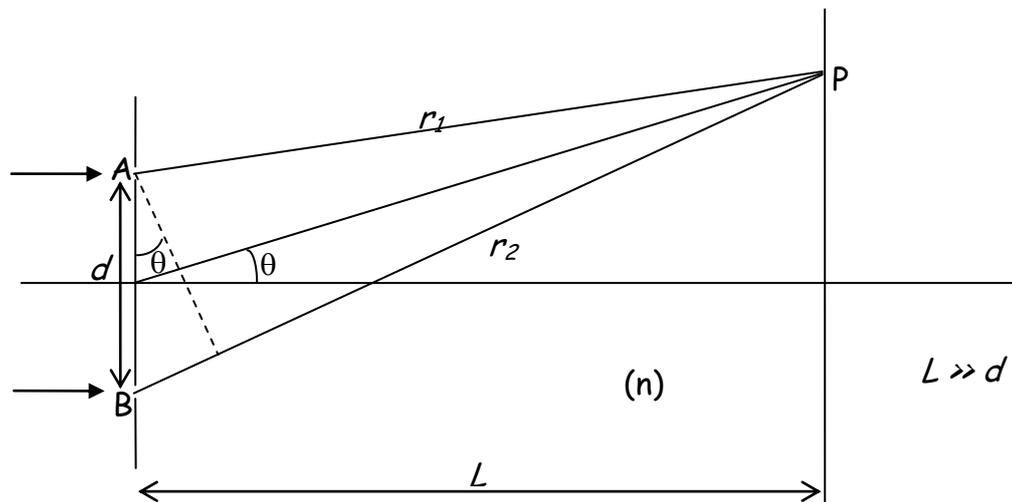
- Laser He-Ne multimodes ( $\lambda = 632.8 \text{ nm}$  et  $\Delta\lambda = 0,67 \text{ pm}$ )  
 $L_c = c/\Delta\nu = c/\Delta\lambda = c/0,5 \cdot 10^9 = 0,6 \text{ m}$  (pour ? modes)
- Laser He-Ne monomode  $L_c = c/\Delta\nu = c/1,4 \cdot 10^7 = 20 \text{ m}$  ?



### III. Production d'interférences

#### 1. Division du front d'onde

Fente double : 2 fentes infiniment fines construites comme des sources secondaires



$$E(P, t) = A(e^{+ikr_1} + e^{+ikr_2})e^{-i\omega t}$$

$$E(P) = Ae^{+ikr_1}(1 + e^{+ik(r_2 - r_1)})$$

en posant  $\Phi = k(r_2 - r_1) \approx knd \sin\theta = 2\pi(\delta)/\lambda_0$  il vient :

$$I(P) = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \varphi(P) = 2I_0 [1 + \cos \Phi(P)]$$

$$I(P) = 2I_0 \left[ 1 + \cos \frac{2\pi nd \sin \theta}{\lambda_0} \right] = 4I_0 \cos^2 \frac{\pi nd \sin \theta}{\lambda_0}$$

Différence de marche en P :  $(\delta) = nd \sin\theta$

Sur l'écran on observe des franges d'interférences perpendiculaires au plan de la figure et on a :

$$\begin{array}{ll} \delta = m\lambda \Rightarrow I = I_{max} = 4 I_0 & \text{interférences constructives} \\ \delta = (m + \frac{1}{2})\lambda \Rightarrow I = I_{min} = 0 & \text{interférences destructives} \end{array}$$

avec  $m$  entier

*Optique de Fourier et formation des images*

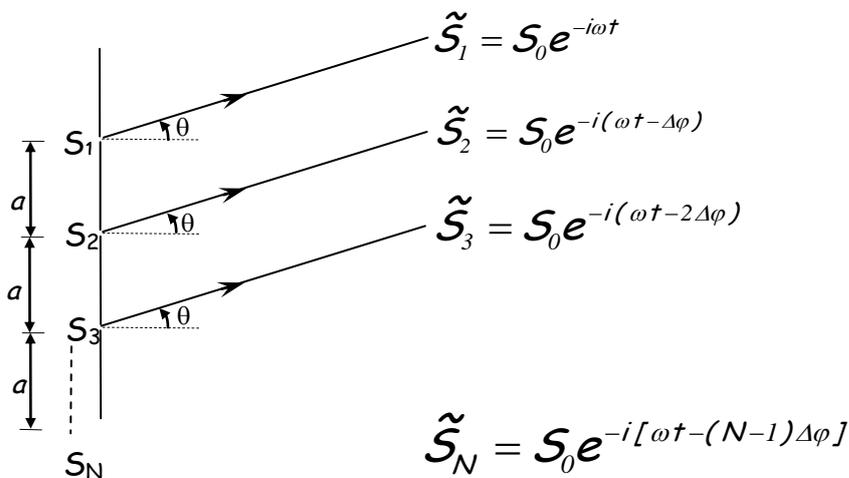
Yann VAILLS – date de dernière mise à jour : 06/09/2019

Ce cours est disponible à l'adresse suivante : <http://www.cemhti.cnrs-orleans.fr/?nom=Vaills>

## Fentes multiples :

Il s'agit du cas où plusieurs sources cohérentes (ou synchrones), ponctuelles et identiques sont distribuées linéairement. L'observation est faite à très grande distance par rapport à la distance de séparation de source, de sorte que les rayons qui interfèrent puissent être considérés comme rigoureusement parallèles.

### Calcul de l'intensité résultante



$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda_0} na \sin \theta$$

La vibration résultante est donc  $\tilde{S}$  telle que :

$$\begin{aligned} \tilde{S} &= \tilde{S}_1 + \tilde{S}_2 + \dots + \tilde{S}_N = S_0 [1 + e^{i\Delta\varphi} + \dots + e^{i(N-1)\Delta\varphi}] e^{-i\omega t} \\ &= S_0 \frac{1 - e^{iN\Delta\varphi}}{1 - e^{i\Delta\varphi}} e^{-i\omega t} \end{aligned}$$

$$\text{soit : } \tilde{S} = S_0 e^{i(N-1)\frac{\Delta\varphi}{2}} \frac{\sin\left(\frac{N\Delta\varphi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\Delta\varphi}{2}\right)} e^{-i\omega t}$$

Soit finalement une intensité  $I = I_0 \left[ \frac{\sin\left(\frac{N\Delta\varphi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\Delta\varphi}{2}\right)} \right]^2$

$I = I_{Max}$  pour  $\frac{\Delta\varphi}{2} = k\pi$ ,  $k$  entier relatif, soit  $I_{Max} = N^2 I_0$

$I = I_{Min}$  pour  $N \frac{\Delta\varphi}{2} = k' \pi$ , avec  $\frac{\Delta\varphi}{2} \neq k\pi$ ,  $k$  et  $k'$  entiers relatifs soit  $I_{Min} = 0$

Maxima secondaires :  $I \approx \frac{I_0}{\sin^2\left(\frac{\Delta\varphi}{2}\right)} \ll I_{Max} = N^2 I_0$  (quand  $N$  est grand)

Etude sommaire de la courbe  $I(\Delta\varphi)$  : cas  $N = 6$

$$I = I_0 \left[ \frac{\sin\left(\frac{6\Delta\varphi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\Delta\varphi}{2}\right)} \right]^2$$

$I(\Delta\varphi) = 0$  pour  $\sin\left(\frac{6\Delta\varphi}{2}\right) = 0$  et  $\sin\left(\frac{\Delta\varphi}{2}\right) \neq 0$

c'est-à-dire :

$I(\Delta\varphi) = 0$  pour  $\frac{6\Delta\varphi}{2} = p\pi$   $p$  entier différent de 0 et non multiple de 6,

$p = 1, 2, 3, 4, 5$

Dans le cas où  $p = 0$  modulo 6 l'expression  $I(\Delta\varphi)$  est indéterminée.

Comme  $I$  est périodique il suffit d'examiner  $I(\Delta\varphi)$  au voisinage de  $\Delta\varphi = 0$

Près de  $\Delta\varphi = 0$  on a :  $\sin\left(\frac{6\Delta\varphi}{2}\right) = \frac{6\Delta\varphi}{2}$  et  $\sin\left(\frac{\Delta\varphi}{2}\right) = \frac{\Delta\varphi}{2}$

$$\lim_{\Delta\varphi \rightarrow 0} I(\Delta\varphi) = N^2 I_0 = 36 I_0 = I_{Max}$$

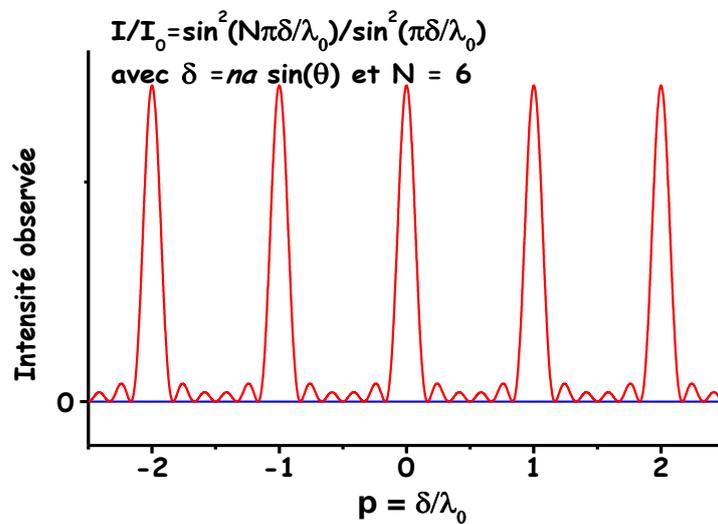
Entre deux minima nuls il y a un maximum secondaire. On peut se faire une idée de leur intensité en recherchant par exemple la valeur de  $I$  correspondant à

$$\Delta\varphi = \frac{3\pi}{6} \text{ c'est-à-dire l'ordre } p = \frac{\Delta\varphi}{2\pi} = \frac{1}{4}$$

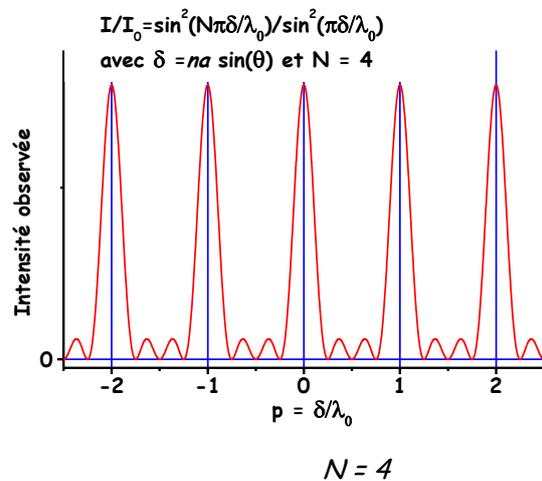
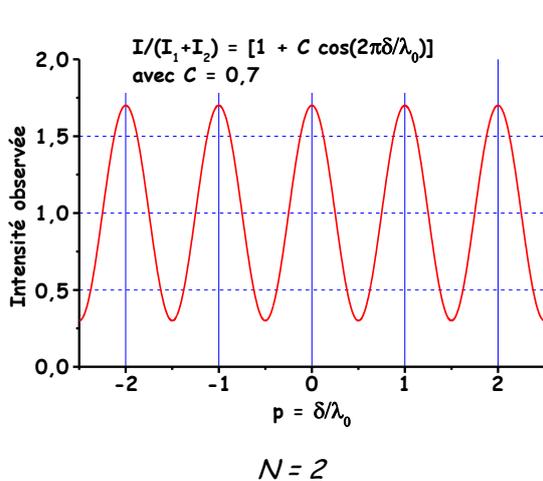
$$I\left(\frac{3\pi}{6}\right) = I_0 \frac{1}{\sin^2\left(\frac{3\pi}{12}\right)} \quad I\left(\frac{3\pi}{6}\right) / I_{Max} = \frac{2}{36} = 0,06$$

Les maxima secondaires sont pratiquement invisibles (pour  $N$  grand)

Les minima sont à  $p = 1/6, 2/6, 3/6, 4/6, 5/6...$



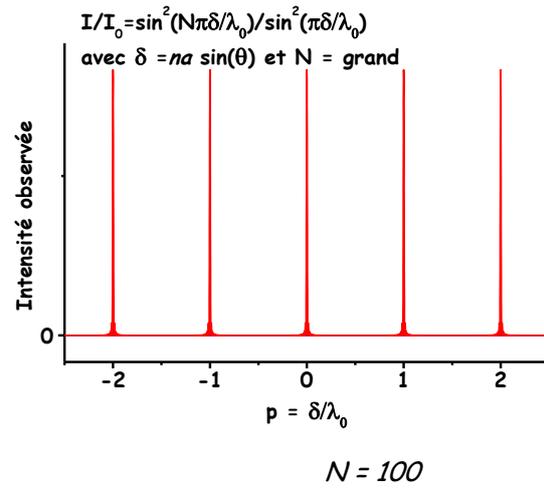
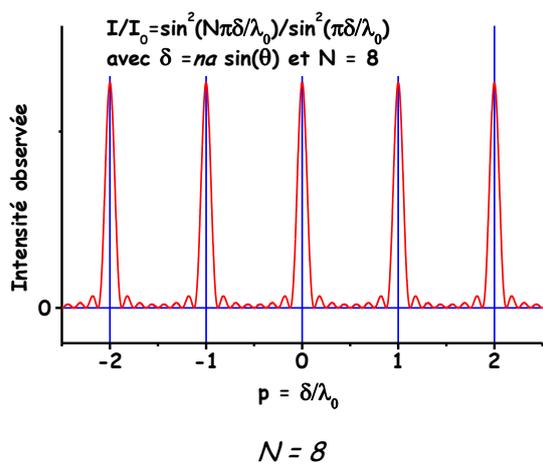
Lorsque  $N$  augmente l'intensité n'a de valeur appréciable que dans des intervalles étroits autour des valeurs entières de l'ordre d'interférence.



*Optique de Fourier et formation des images*

Yann VAILLS – date de dernière mise à jour : 06/09/2019

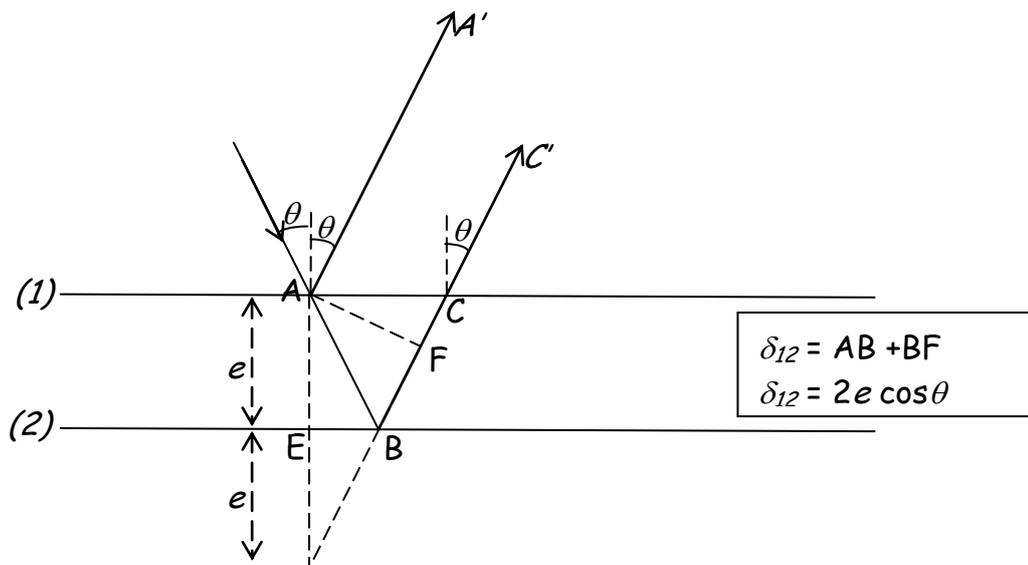
Ce cours est disponible à l'adresse suivante : <http://www.cemhti.cnrs-orleans.fr/?nom=Vaills>



## 2. Division d'amplitude

Interférences à 2 ondes :

La surface de localisation des franges est le lieu de l'intersection de 2 rayons provenant d'un même rayon incident. Les 2 rayons sont parallèles : la localisation des franges se fait à l'infini, dans la direction  $AA'$ .



### Franges des lames à faces parallèles épaisses

On considère une source étendue.

Pour l'observation des franges on positionnera l'axe de l'objectif parallèlement à  $IS'$  afin d'observer les franges dans son plan focal.

Pour un faisceau incident d'axe  $AE$  la figure d'interférence sera de révolution autour de cet axe, elle sera constituée d'anneaux (anneaux d'égalé inclinaison) dits de Haidinger.

Principe du montage :

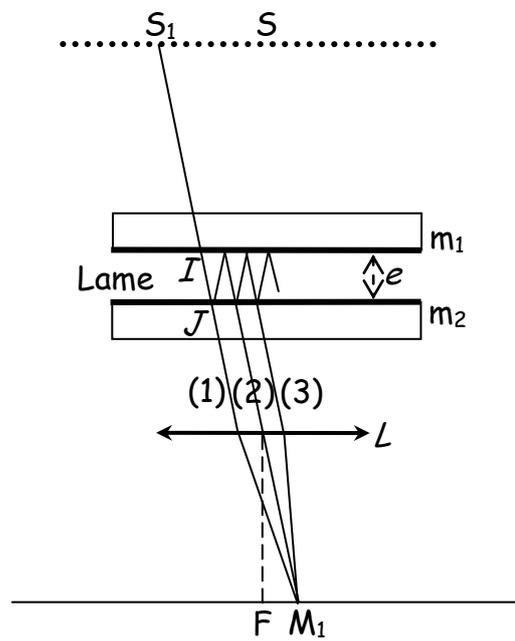
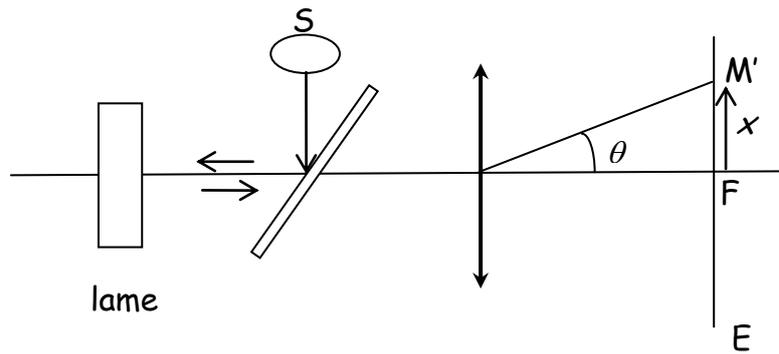
(en réflexion comme en transmission)

Avec un tel montage on observe des anneaux centrés sur  $F$

*Optique de Fourier et formation des images*

Yann VAILLS – date de dernière mise à jour : 06/09/2019

Ce cours est disponible à l'adresse suivante : <http://www.cemhti.cnrs-orleans.fr/?nom=Vaills>



### a. Calcul de la différence de marche

En réflexion :

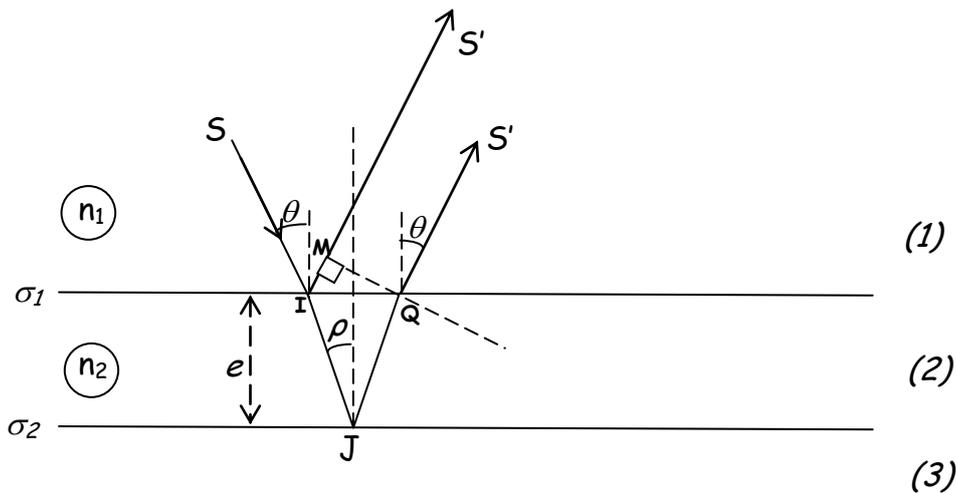
Le plan d'onde « réfléchi » est matérialisé par MQ sur le schéma ci-dessous. La différence de marche  $\delta_{S'}$  à prendre en compte ne dépend que des trajets antérieurs à ce plan et postérieurs au point d'impact I sur la lame.

$$(\delta_{S'}) = (IJQ) = n_2 [IJ + JQ] - n_1 [IM]$$

$$\text{avec : } (IJ) = \frac{n_2 e}{\cos \rho} = JQ \quad \text{et} \quad IM = 2e \frac{\sin \rho}{\cos \rho} \frac{n_2}{n_1} \sin \rho$$

la différence géométrique de chemin optique est donc :

$$(\delta_{S'})_{\text{géom}} = 2n_2 e \cos \rho$$



La réflexion peut introduire, suivant les valeurs des indices, une différence de marche supplémentaire :

$$n_2 > n_1 \Rightarrow \varphi = \pi \text{ et } (\delta_\varphi) = \lambda_0/2$$

$$n_2 < n_1 \Rightarrow \varphi = 0 \text{ et } (\delta_\varphi) = 0$$

Ainsi pour une lame de verre dans l'air ( $n_2 > n_1$ ) on aura :

$$(\delta_{S'}) = 2ne \cos \rho + \lambda_0/2 \text{ en réflexion}$$

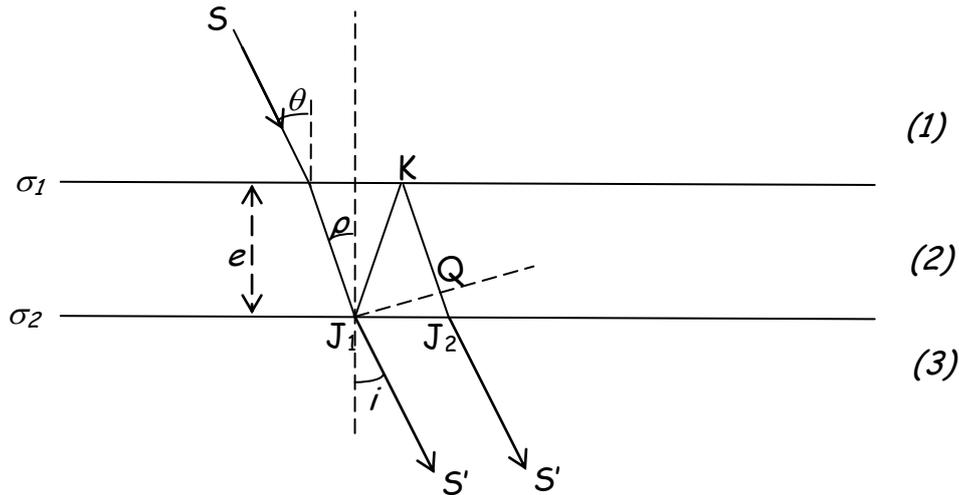
En transmission :

Le parcours est identique pour tous les rayons jusqu'en  $J_1$

Les chemins optiques de  $J_1Q$  à  $S'$  sont égaux  $(\delta_{S'})_{geom} = 2ne \cos \rho$

Dans le cas de la lame de verre dans l'air on a des réflexions internes à la lame et  $\delta_{phys} = 0$  d'où :

$$(\delta_{S'}) = 2ne \cos \rho$$

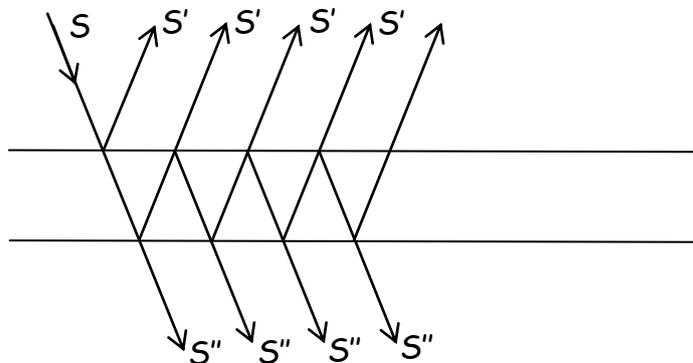


Remarque :

En réflexion et en transmission on peut envisager les interférences entre rayons multiréfléchis.

La différence de marche calculée est alors celle qui existe entre 2 rayons réfléchis (transmis) consécutifs.

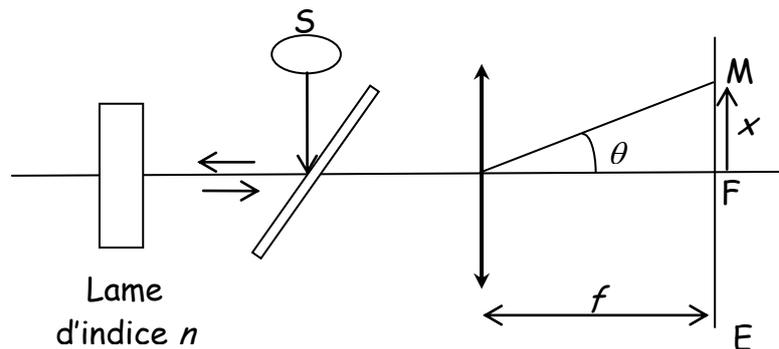
$$(\delta r_{(i,j+1)}) = 2ne \cos \rho (+ \lambda_0/2)$$



Les rayons qui vont en  $S'$  ( $S''$ ) sont tous issus d'un même rayon incident et interfèrent : on a des interférences à ondes multiples.

### b. Franges d'interférence

La différence de marche ne dépend que de l'inclinaison des rayons, et l'ordre d'interférence à l'infini est le même sur un cercle centré sur la direction normale à la lame (que ce soit en réflexion ou en transmission).



$$FM = x \quad \delta_{FM} = 2ne \cos \rho \quad n \sin \rho = \sin \theta$$

$$k = \frac{\delta}{\lambda} = \frac{2ne \cos \rho}{\lambda} \text{ est constant pour } \rho = \text{constante, donc pour } \theta = \text{constante.}$$

Dans le plan focal de la lentille les franges d'interférence sont des anneaux circulaires centrés en  $F$  (anneaux d'égle inclinaison).

#### Calcul de l'intensité lumineuse des franges d'interférence :

Il s'agit d'une division d'amplitude. On va calculer les amplitudes des différents rayons transmis ou réfléchis en incidence quasi normale.

Les coefficients de réflexion et de transmission en amplitude à la traversée d'un

$$\text{dioptre } n_1 \rightarrow n_2 \text{ sont : } r = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \quad t = \frac{2n_1}{n_1 + n_2}$$

*Optique de Fourier et formation des images*

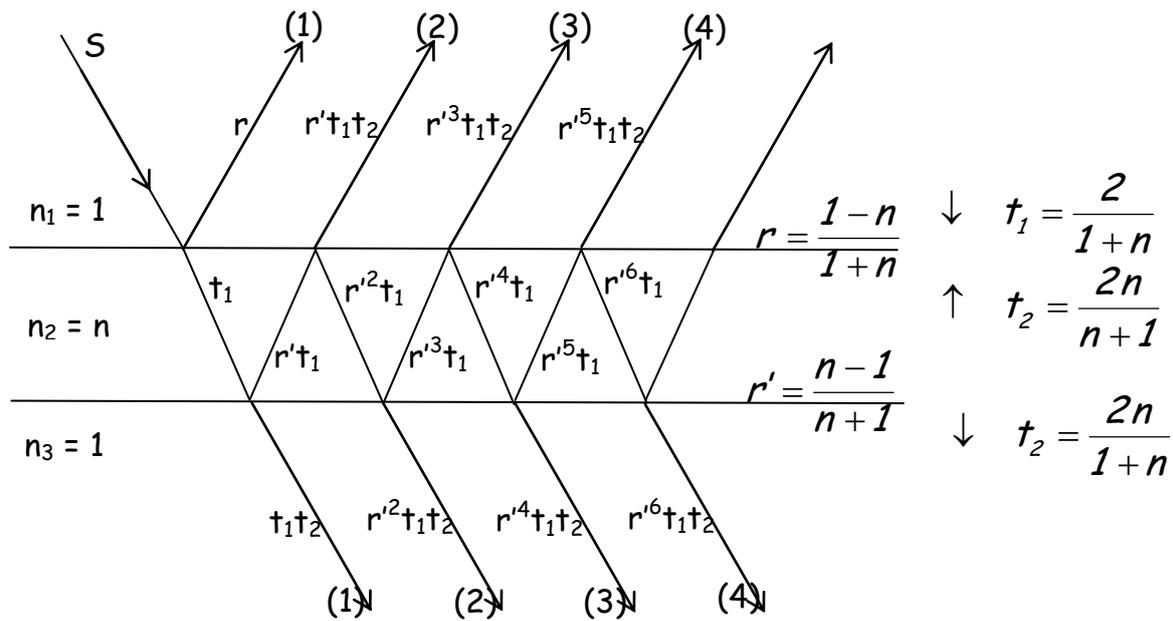
*Yann VAILLS – date de dernière mise à jour : 06/09/2019*

*Ce cours est disponible à l'adresse suivante : <http://www.cemhti.cnrs-orleans.fr/?nom=Vaills>*

Les coefficients de réflexion et de transmission en intensité (resp. réflectivité et transmittivité) à la traversée d'un dioptre  $n_1 \rightarrow n_2$

$$R = r^2 = \left( \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \right)^2 \quad T = \frac{n_2}{n_1} t^2 = \frac{4n_1 n_2}{(n_1 + n_2)^2}$$

Exemple : lame de verre dans l'air : interférences à ondes multiples



Verre :  $n = 1,5$        $r = -0,2 = -r'$        $t_1 = 0,8$        $t_2 = 1,2$   
 $R = 0,04$        $T = 0,96$

Réflexion :

(1)  $r = -0,2$       (2)  $r't_1t_2 = 0,19$       (3)  $r'^3t_1t_2 = 0,008$   
(4)  $r'^5t_1t_2 = 0,00032$

Transmission :

(1)  $t_1t_2 = 0,96$       (2)  $r'^2t_1t_2 = 0,038$       (3)  $r'^4t_1t_2 = 0,0015$   
(4)  $r'^6t_1t_2 = 0,00001$

*Optique de Fourier et formation des images*

Yann VAILLS – date de dernière mise à jour : 06/09/2019

Ce cours est disponible à l'adresse suivante : <http://www.cemhti.cnrs-orleans.fr/?nom=Vaills>

Les amplitudes des rayons lumineux ne varient pas de la même manière en réflexion et en transmission.

### Anneaux par réflexion :

L'amplitude décroît très vite à partir du 3<sup>ème</sup> rayon. En pratique on a considéré que l'on a donc des interférences à 2 ondes

$$I = 2I_0(1 + \cos \varphi_{12}) \quad \text{où } \varphi_{12} = \delta 2\pi/\lambda = (2\pi/\lambda)(2ne \cos \rho + \lambda/2)$$

$$\text{Au centre } \rho = 0 \text{ et } \varphi_{12} = 4\pi ne / \lambda + \pi$$

Le contraste  $C$  vaut pratiquement 1 : les minima sont noirs.

## IV. Interférométrie

L'interférométrie est basée sur le principe de mesures optiques à partir de phénomènes d'interférences.

### 1. Principe des méthodes

Le comptage des franges, l'étude des modifications qu'elles subissent lors d'une expérience permettent la mesure d'un ordre d'interférence  $p$  ou de la variation  $\Delta p$  de cet ordre.

$$p = p_0 + \Delta p = p_0 + \Delta \left[ \frac{(\delta)}{\lambda_0} \right]$$

$$\text{par exemple on aura : } p = p_0 + \Delta \left[ \frac{2ne \cos \rho}{\lambda_0} \right], \text{ que l'on pourra écrire :}$$

$$p = p_0 + \Delta[2ne\sigma_0 \cos \rho] = \sigma_0 \delta_0 + \Delta[2ne\sigma_0 \cos \rho]$$

Les modifications subies par chacun des paramètres intervenant dans la relation peuvent donner lieu à des applications ou, plus généralement, à des méthodes d'études. En voici, ci-dessous, quelques exemples :

### a. Spectrométrie interférentielle

$p$  dépend de la longueur d'onde  $\lambda$  :

- Appréciation du degré de « monochromaticité » d'une source (mesure de la longueur de cohérence par exemple).
- Etude d'un spectre.

### b. Mesure d'une longueur

$p$  dépend des distances parcourues par les ondes qui interfèrent :

- On pourra mesurer les variations de longueur dans un domaine qui peut être large : de  $N\lambda$  à  $\lambda/N$  l'application dans ce dernier cas sera la dilatométrie.

### c. Mesure d'indice de réfraction

$p$  dépend de l'indice de réfraction  $n$  :

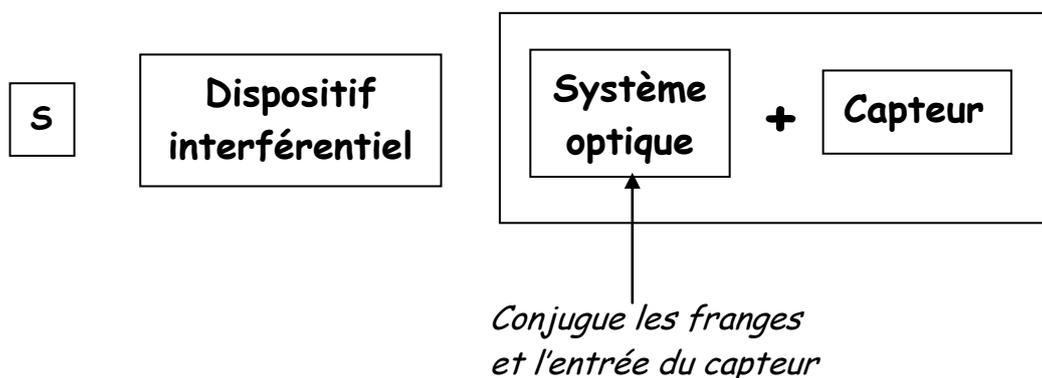
- étude des variations d'indice d'un gaz
- étude des variations de l'indice avec la longueur d'onde

## 2. Interféromètres

### a. Principes de base

Les mesures précédentes nécessitent de pouvoir modifier les trajets optiques des ondes et de mesurer les changements qui interviennent dans une figure d'interférences :

Schéma de principe d'un interféromètre :



## b. Interféromètre à faisceaux séparés

On peut intervenir sur l'un ou l'autre des faisceaux.

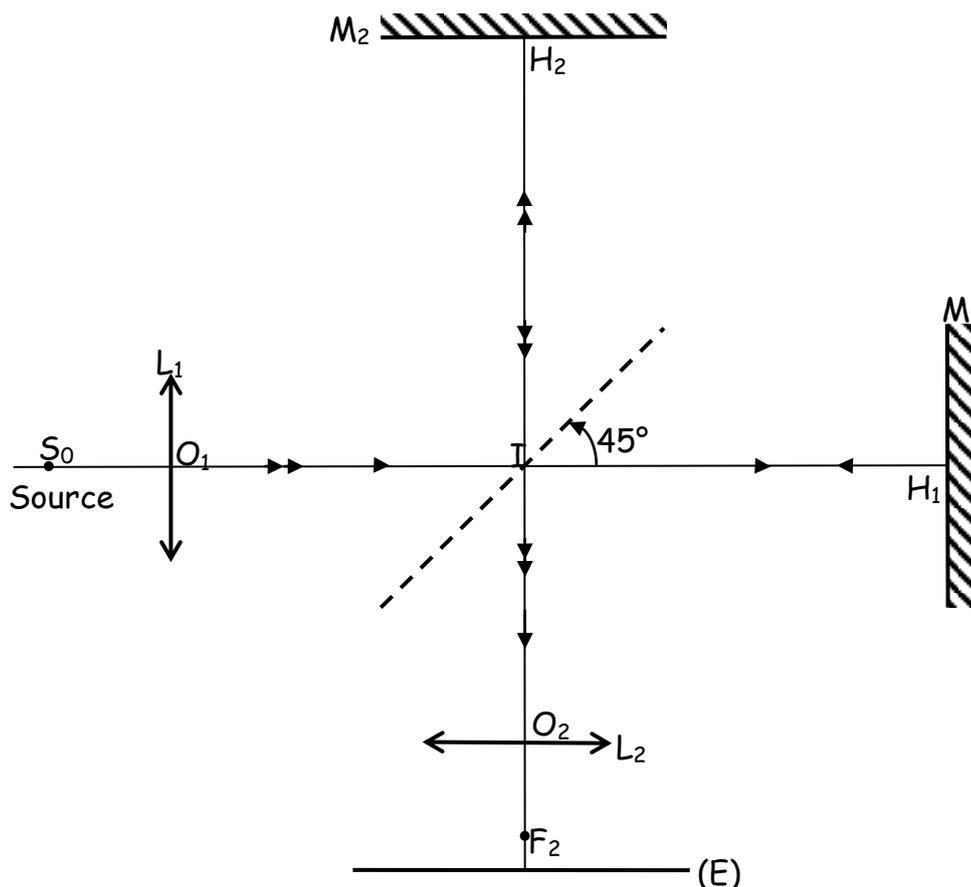
### Interféromètre de Michelson :

C'est un appareil qui permet d'obtenir tous les types d'interférences à 2 ondes.

### Principe de l'appareil :

C'est un appareil à faisceaux séparés (obtenus par division d'amplitudes). La lentille  $L_1$  donne de  $S_0$  une image  $S$  à l'infini ou à grande distance. Les 2 faisceaux sont renvoyés sur eux-mêmes par les 2 miroirs  $M_1$  et  $M_2$  qui leur sont perpendiculaires. Les interférences sont observées dans le plan image de la lentille  $L_2$

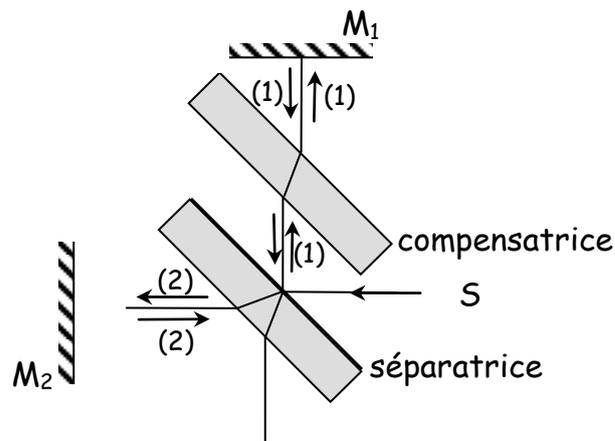
Exemples d'application : analyse spectrale par transformée de Fourier

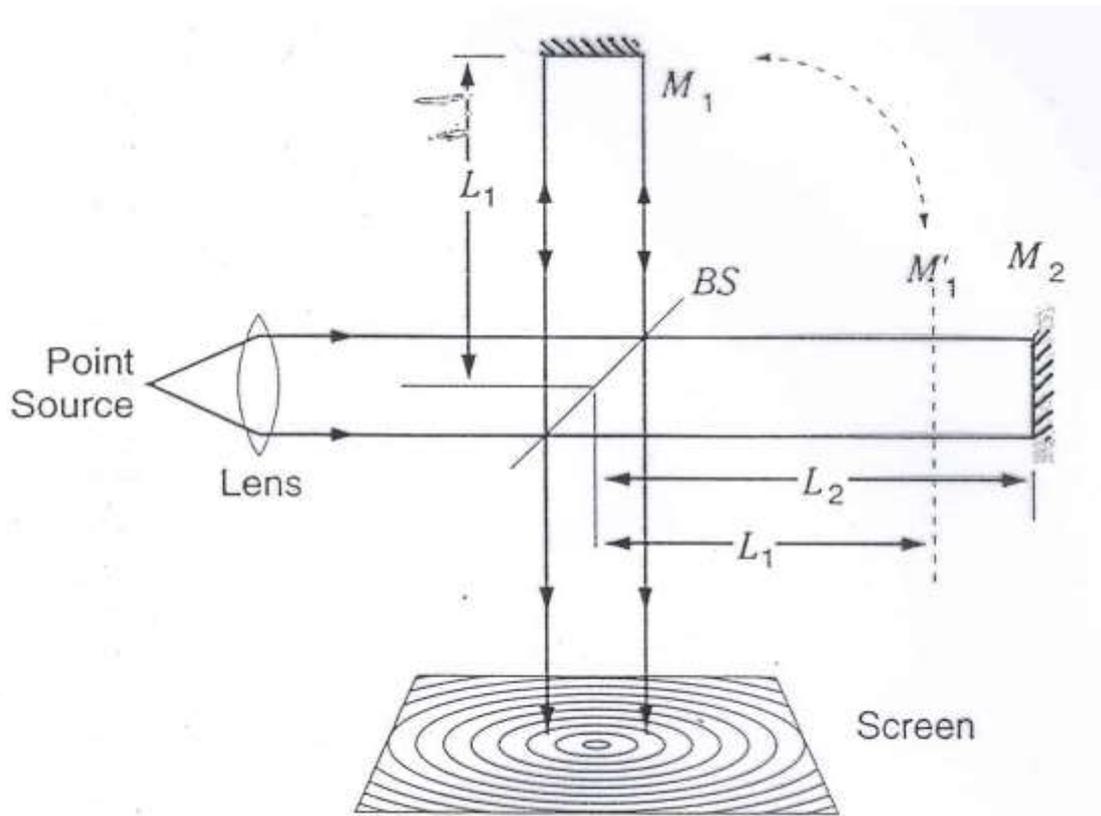


- $M_1, M_2$  sont symétriques : les images de  $S_0, S_1$  et  $S_2$  (resp. images de  $S_0$  par  $M_1$  et  $M_2$ ), sont confondues,  $\Delta\varphi$  est le même en tout point de  $E \Rightarrow$  l'éclairement est uniforme sur l'écran d'observation
- $M_1, M_2$  sont //  $\Rightarrow$  anneaux à l'infini  $M_1M_2 = e \Rightarrow \delta = 2ne \cos r$
- $M_1$  tourné de  $\theta$  par rapport à  $M_2 \Rightarrow S_2$  tourne de  $2\theta$  par rapport à l'axe optique. On observe des franges rectilignes parallèles à l'axe de rotation (franges de coin d'air)
- $\delta$  peut être modifiée par déplacement des miroirs ou introduction d'une lame sur l'un des deux faisceaux (dans ce dernier cas  $\delta = 2[n-1]l$  pour une lame de longueur  $l$ ). On suit les modifications en comptant le nombre des franges qui défilent.

### Réalisation de l'appareil

La séparatrice a une certaine épaisseur et est argentée sur une de ses faces. Ceci crée une dissymétrie dans le trajet des faisceaux, que l'on compense par une lame appelée justement compensatrice.

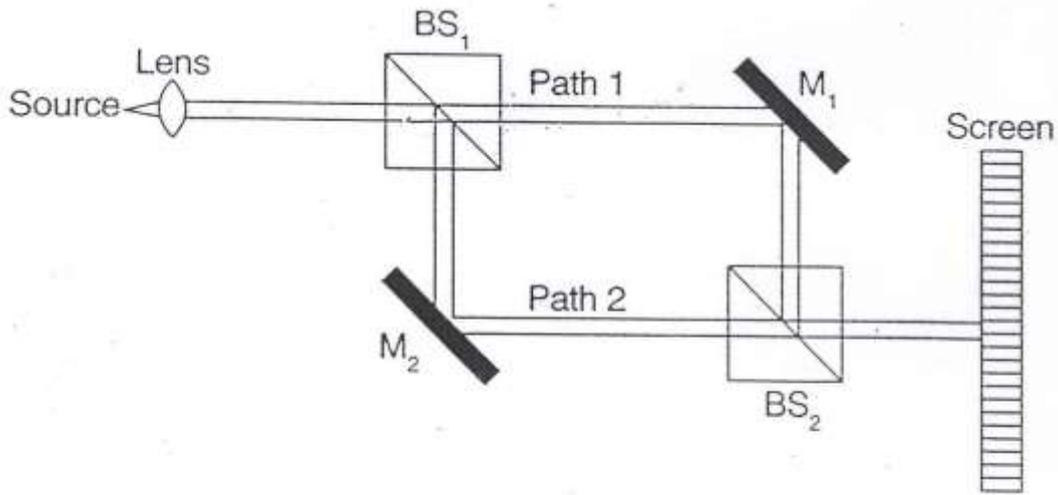




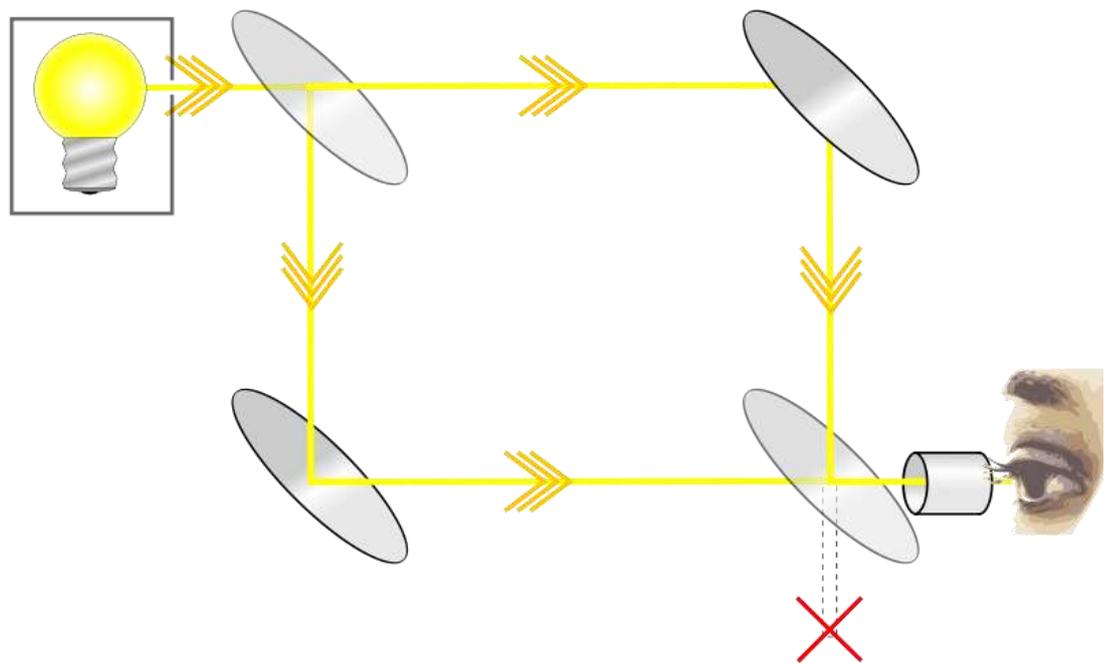
*Michelson interferometer.*

c. Autres exemples de faisceaux séparés

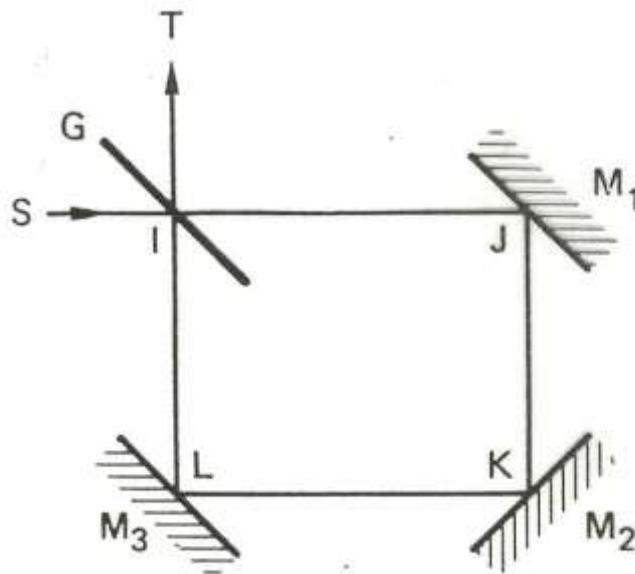
Mach - Zehnder



*Mach-Zehnder interferometer.*



## Sagnac<sup>1</sup>



*Interféromètre de Sagnac.*

---

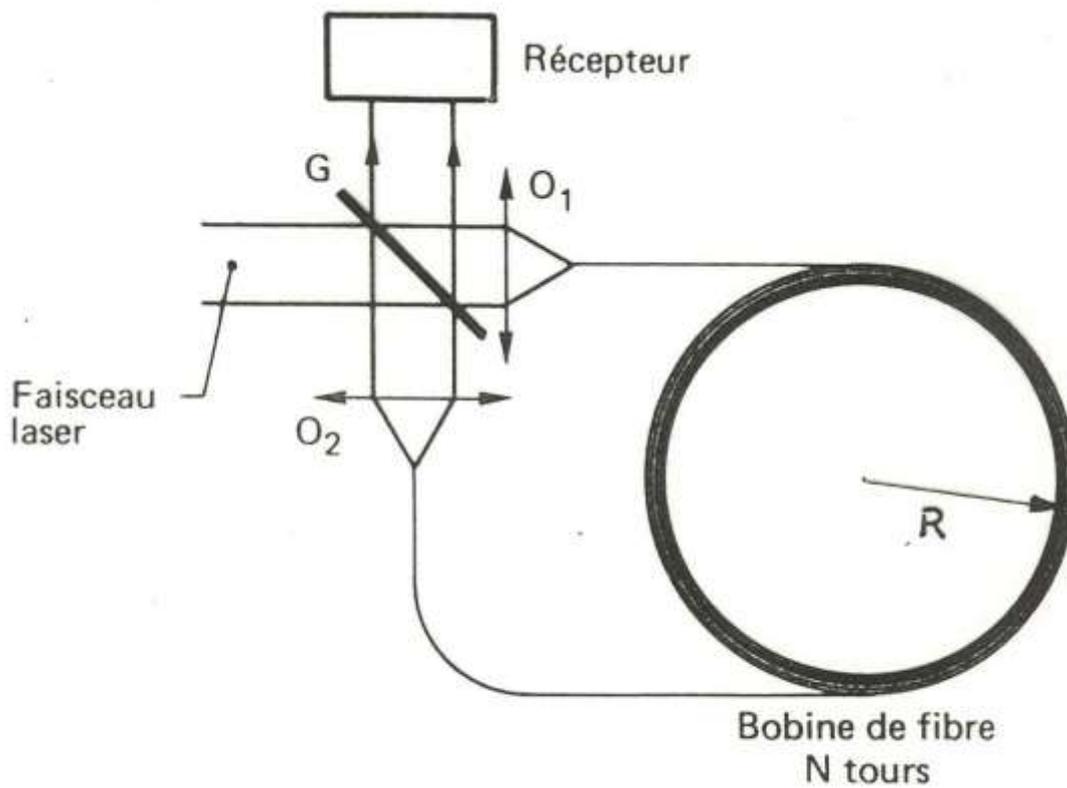
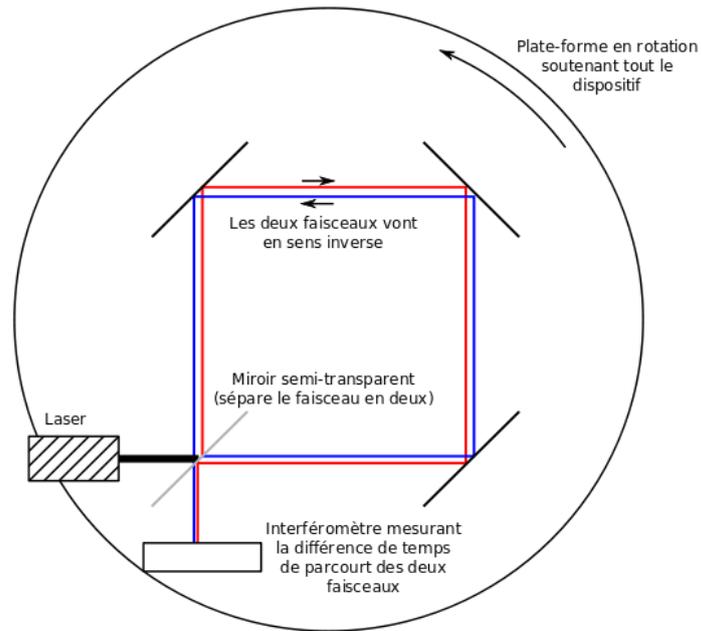
<sup>1</sup> On appelle **effet Sagnac** le décalage temporel de la réception de deux signaux lumineux tournant en sens inverse autour de la circonférence d'un disque en rotation (par rapport à un référentiel inertielle), quand ils sont émis par un émetteur-récepteur fixé sur ce disque. L'effet Sagnac a été découvert par Georges Sagnac en 1913. En physique classique, il est interprétable comme une asymétrie de la vitesse des signaux lumineux par rapport à la circonférence du disque en rotation. En physique relativiste, l'effet correspond à l'impossibilité de synchroniser des horloges sur une courbe fermée soumise à la gravitation, ou à une accélération (en cas de rotation).

En 1925, Michelson et Gale mesurèrent la rotation de la terre grâce à un grand interféromètre en utilisant l'effet Sagnac. Legyrolaser utilisé comme gyromètre est une application directe de l'effet Sagnac. (réf. : [http://fr.wikipedia.org/wiki/Effet\\_Sagnac](http://fr.wikipedia.org/wiki/Effet_Sagnac))

*Optique de Fourier et formation des images*

*Yann VAILLS – date de dernière mise à jour : 06/09/2019*

*Ce cours est disponible à l'adresse suivante : <http://www.cemhti.cnrs-orleans.fr/?nom=Vaills>*



*Interféromètre de Sagnac à fibre.*

**d. Ondes multiples : Fabry-Pérot - exemple**  
**d'application : étude de raies fines**

Anneaux par transmission :

Il faut tenir compte de tous les rayons. Le 1<sup>er</sup> transmis a une amplitude relativement importante, les amplitudes des suivants décroissant régulièrement. Entre 2 ondes transmises successives le déphasage est le même :

$$\varphi_{12} = \delta 2\pi/\lambda = 2\pi p$$

amplitude du 1<sup>er</sup> rayons transmis :  $a_1 = A_0 t_1 t_2 = A_0 T$   
 $n^{\text{ème}}$  rayons transmis :  $a_n = a_1 R^{n-1}$  avec  $R < 1$

Amplitude transmise :

$$\tilde{S} = \tilde{S}_1 + \tilde{S}_2 + \dots + \tilde{S}_N = a[1 + Re^{i\varphi} + \dots + R^2 e^{i(n-1)\varphi} + \dots]$$

$$S_n = a \frac{1 - R^n e^{in\varphi}}{1 - Re^{i\varphi}} \rightarrow S = \frac{a}{1 - Re^{i\varphi}}$$

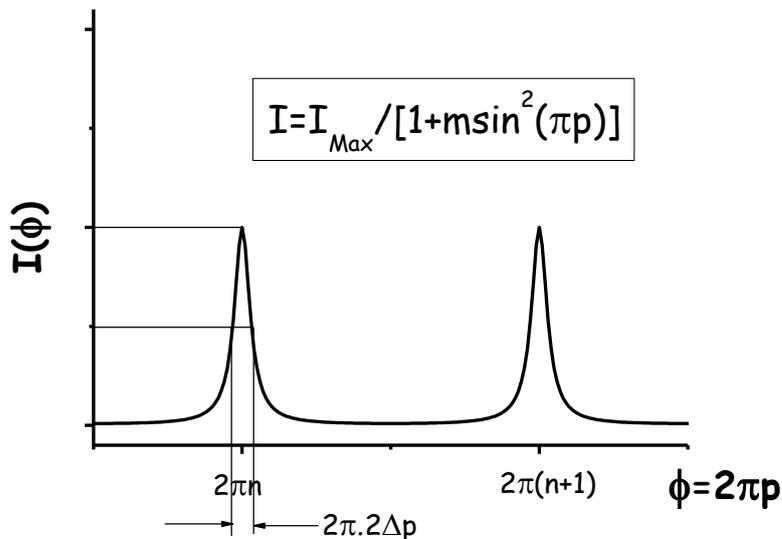
Intensité lumineuse transmise :

$$I = \frac{a^2}{1 + R^2 - 2R \cos \varphi}$$

$$I = \frac{a^2}{(1 - R)^2 + 4R \sin^2 \frac{\varphi}{2}} = \frac{\frac{a^2}{(1 - R)^2}}{1 + \frac{4R}{(1 - R)^2} \sin^2 \frac{\varphi}{2}}$$

$$I = \frac{I_M}{1 + m \sin^2 \pi p}$$

avec  $I_M = \frac{I_0}{(1 - R)^2}$  et  $m = \frac{4R}{(1 - R)^2}$



Visibilité des franges :  $V = \frac{I_{Max} - I_{Min}}{I_{Max} + I_{Min}} = \frac{2R}{1 + R^2}$

$R \rightarrow 1 \Rightarrow V \rightarrow 1$

On introduit souvent :

Le facteur de contraste :  $C = \frac{I_{Max}}{I_{Min}}$  qui caractérise directement la manière

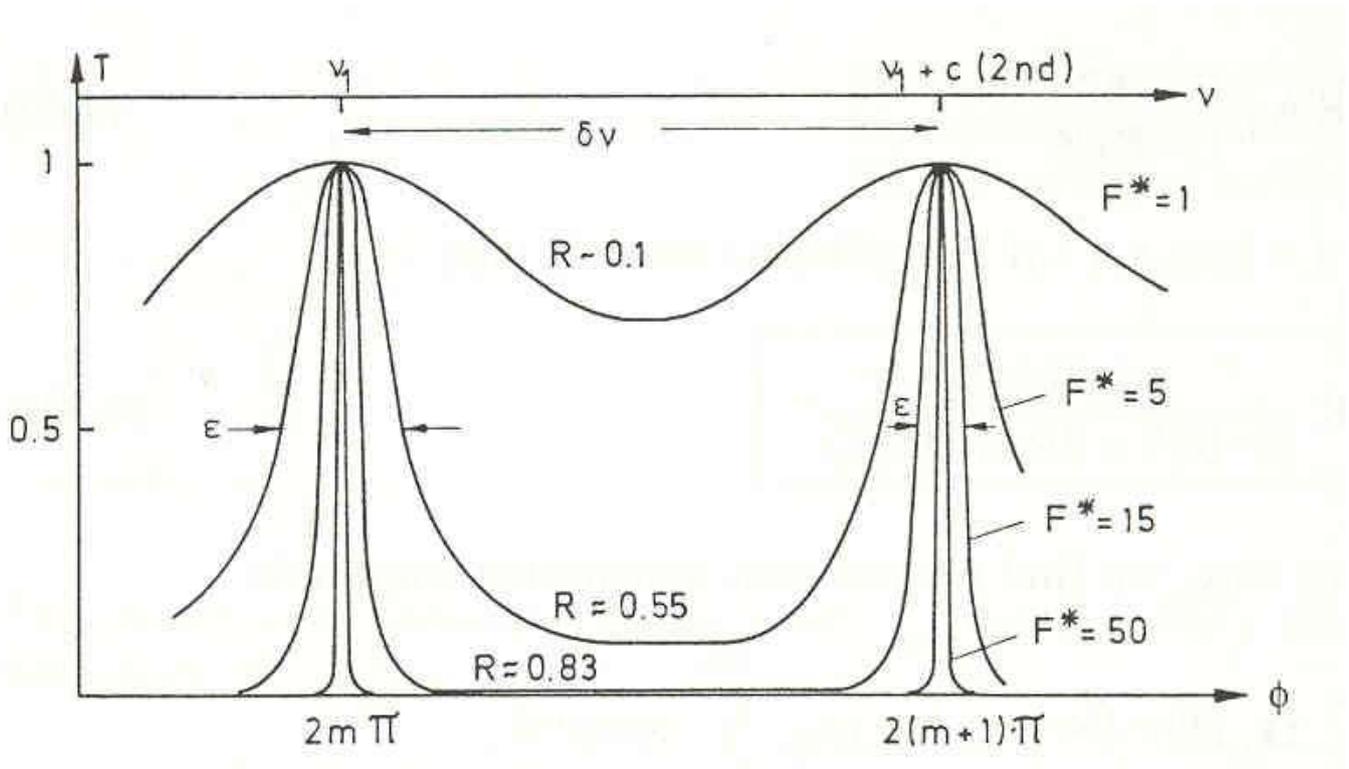
dont le sommet de l'anneau se détache sur le fond sombre. Ce facteur de contraste est parfois appelé par simplification abusive « contraste ».

La finesse  $\mathcal{F}$  qui est le quotient de la distance entre deux frange à la largeur à

mi-hauteur  $\mathcal{F} = \frac{1}{2\Delta p} = \frac{\pi\sqrt{R}}{1-R}$

On a ainsi pour  $R$  grand (ex :  $R = 0,95$ ) :

$$V \cong 1 \quad C = \left( \frac{1+R}{1-R} \right)^2 = 39^2 \quad \mathcal{F} = 61$$



## V. Exemples d'applications : Analyse spectrale

### 1. Spectromètre par Transformée de Fourier (Michelson TF)

Avec une lumière possédant un spectre en intensité  $J_0(\nu)$  appelée aussi « densité spectrale d'intensité », chaque composante à la fréquence  $\nu$  contribue à l'intensité finale détectée sur la gamme de fréquence  $[\nu, \nu+d\nu]$  par :

$$dI = 2J_0(\nu) \left( 1 + \cos \frac{2\pi}{c} \nu(\delta) \right) d\nu$$

Si un miroir du Michelson se déplace parallèlement à lui-même à la vitesse  $v$  alors la différence de marche est :  $\delta = 2vt$

Et l'intensité détectée entre  $\nu$  et  $\nu+d\nu$  est :

$$dI = 2J_0(\nu) \left( 1 + \cos 2\pi \frac{2v\nu}{c} t \right) d\nu$$

$$dI = 2J_0(\nu) (1 + \cos 2\pi Nt) d\nu \quad \text{avec} \quad N = \frac{2v}{c} \nu$$

Pour une radiation à la fréquence  $\nu$  le signal de sortie est modulé à 100% à la fréquence  $N \propto \nu$ .

Le montage apparaît comme démultiplicateur de la fréquence à très grand rapport de réduction ( $\nu/c$ )

Pour un signal ayant une répartition en fréquence, l'intensité totale est donnée par :

$$I = \int_{\Delta} J(\nu) d\nu \quad \text{et l'intensité détectée par l'appareil à l'instant } t \text{ est donc :}$$

$$Y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} J(N) \cos 2\pi Nt dN$$

$Y(t)$  est l'interférogramme

$$Y(t) = TF[J(N)]_{réelle}$$

*Optique de Fourier et formation des images*

Yann VAILLS – date de dernière mise à jour : 06/09/2019

Ce cours est disponible à l'adresse suivante : <http://www.cemhti.cnrs-orleans.fr/?nom=Vaills>

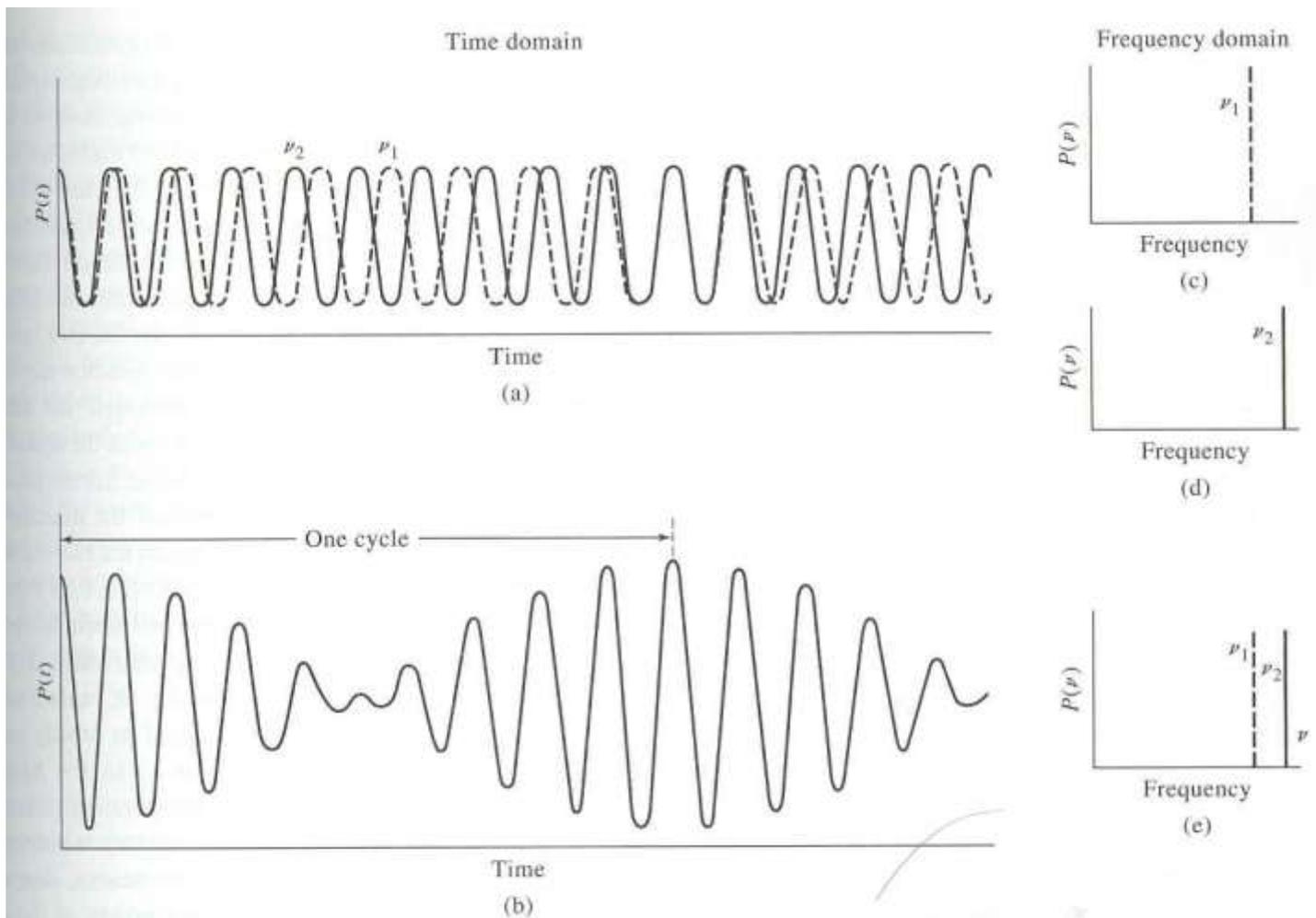
Le calcul de  $TF^{-1}[J(N)]$  Transformée de Fourier réciproque de  $J(N)$  permet de déterminer  $J(N)$ , donc  $J(\nu)$

Une application importante de ceci se trouve dans la spectrométrie infra rouge et visible.

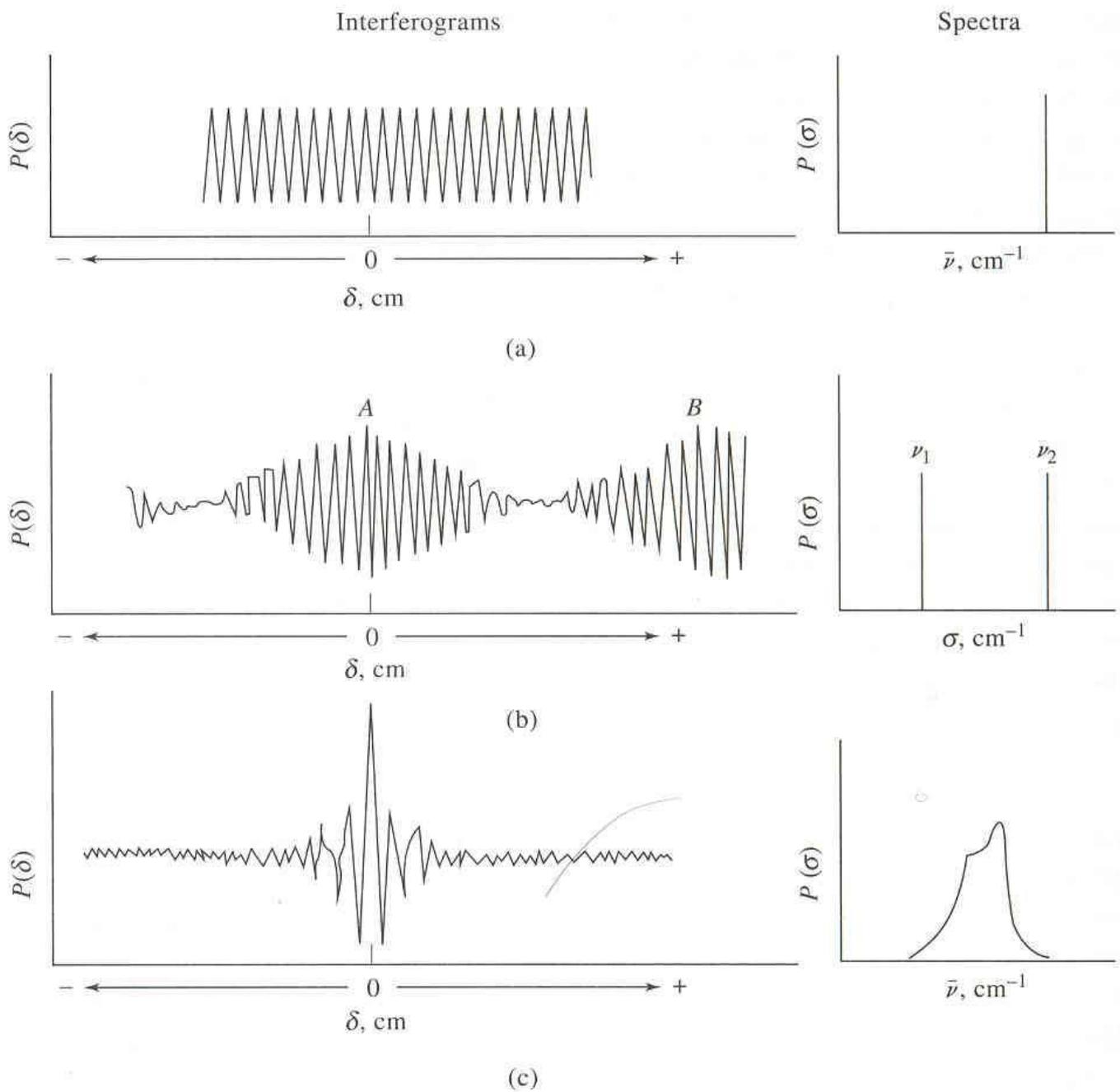
Exemple : soit une densité spectrale assimilable à une distribution de Dirac centrée en  $\nu_1$ :  $J(\nu) = J_0 \delta(\nu - \nu_1)$

Le spectrogramme est donné par :

$$Y(t) = \text{Re}[TF(J_0 \delta(\nu_1))] = \text{Re}[J_0 e^{i\pi \nu_1 t}] = J_0 \cos(\pi \nu_1 t)$$

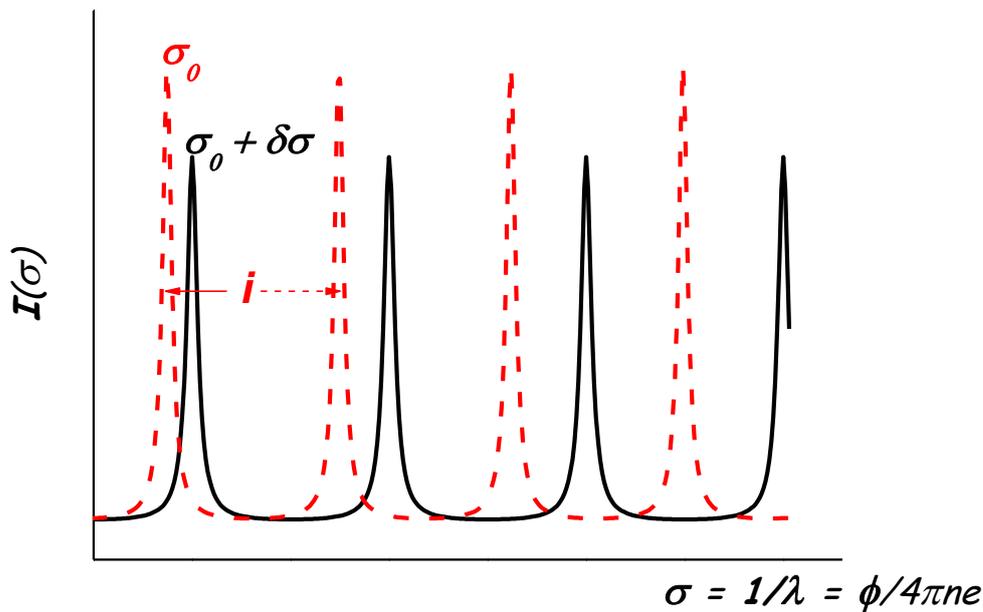


**Figure 7-40** Illustrations of (1) time-domain plots (a) and (b) and (2) frequency-domain plots (c), (d), and (e).

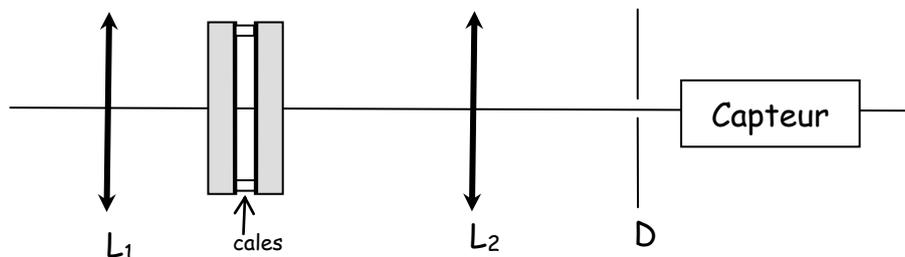


## 2. Spectromètre Pérot-Fabry

Position des franges : 2 raies de nombres d'ondes différents donnent des interférogrammes différents



Description schématique :



Balayage du spectre : le défilement des franges se fait devant un diaphragme fixe. Ce défilement s'obtient par variation régulière de « l'épaisseur optique »  $ne$  de l'interféromètre. Pour cela on peut faire varier soit  $n$  par variation de la pression de gaz dans la lame épaisse, soit par variation de  $e$  par variation de la largeur des cales (utilisation de l'effet piezo-électrique).

Exemple : variation de  $e$

$$\Delta\varphi = 2\pi\sigma 2ne \cos r = 2\pi p \quad \text{et} \quad I = \frac{I_{Max}}{1 + m \sin^2\left(\frac{\Delta\varphi}{2}\right)}$$

le diaphragme est centré, on observe donc sur l'axe optique ( $r = 0$ ) et sur l'ordre d'interférence observé est a priori quelconque et vaut :  $p_0 = 2\sigma ne$

Si l'épaisseur  $e$  augmente, alors l'ordre d'interférence croît, et lorsqu'il atteint une valeur entière  $k_1$  pour  $\sigma_1$  :  $k_1 = 2\sigma_1 ne_1$  l'intensité  $I(\sigma_1)$  correspondant à lumière de nombre d'onde  $\sigma_1$  est maximale. L'anneau est alors concentré en  $r = 0$

Pour un autre nombre d'onde  $\sigma_2$  l'ordre d'interférence est  $p_2 = 2\sigma_2 ne_1$  et n'a pas de raison en général d'être entier. L'intensité  $I(\sigma_2)$  devient maximum pour une autre valeur  $e_2$  de  $e$  et on a alors :  $k_2 = 2\sigma_2 ne_2$  entier

Application : spectrométrie à haute résolution. Cette technique permet la séparation (la résolution) de raies fines très proches en fréquence.

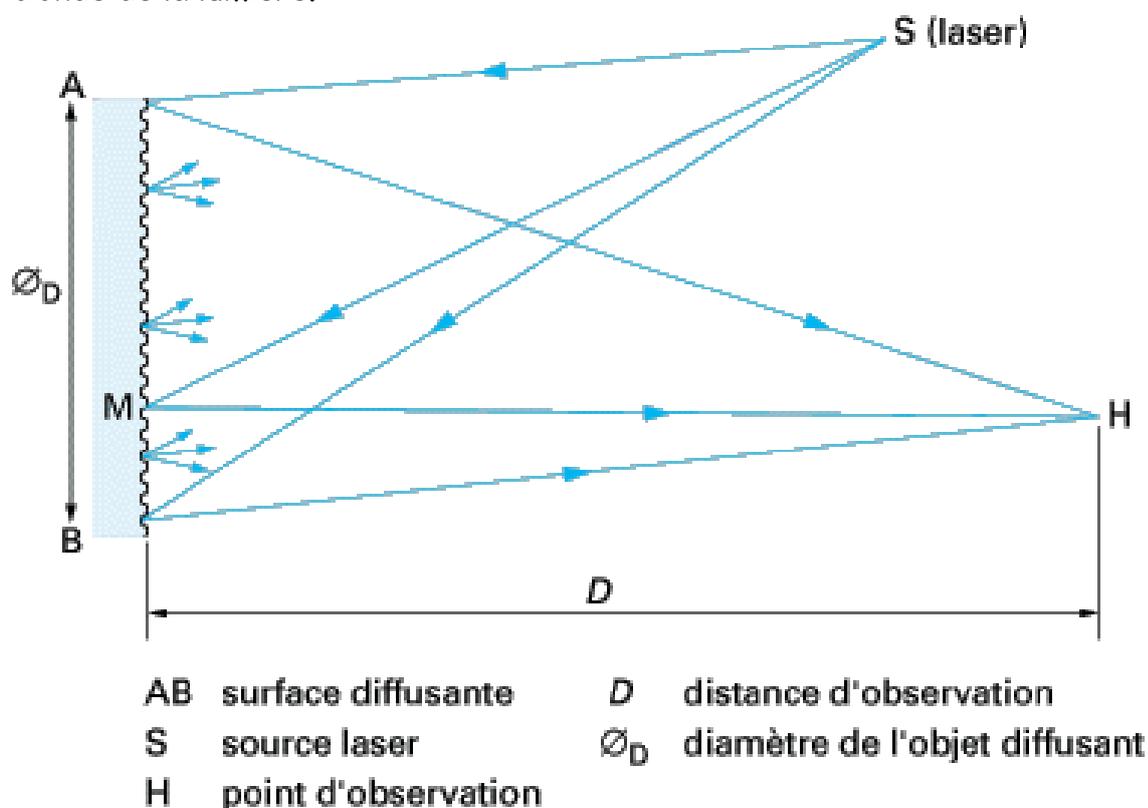
Exemple d'utilisation pour la spectrométrie Brillouin : la résolution effective est :  $R = 760\,000$

### 3) Interférométrie de speckle

(cette partie du document, succinctement rédigée, est une reproduction du diaporama présenté en séance)

Speckle = granulométrie laser, moucheture, tache

Le speckle se manifeste dès que la surface d'objet diffusant, éclairé par une source de lumière cohérente, présente un relief microscopique donnant, vu du point d'observation, des variations de chemin optique supérieures à la longueur d'onde de la lumière.



**Figure 1** - montage sans lentille permettant d'obtenir un speckle

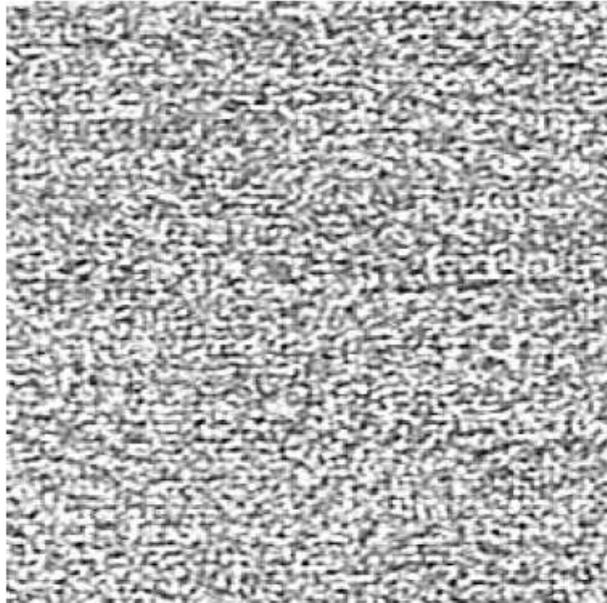


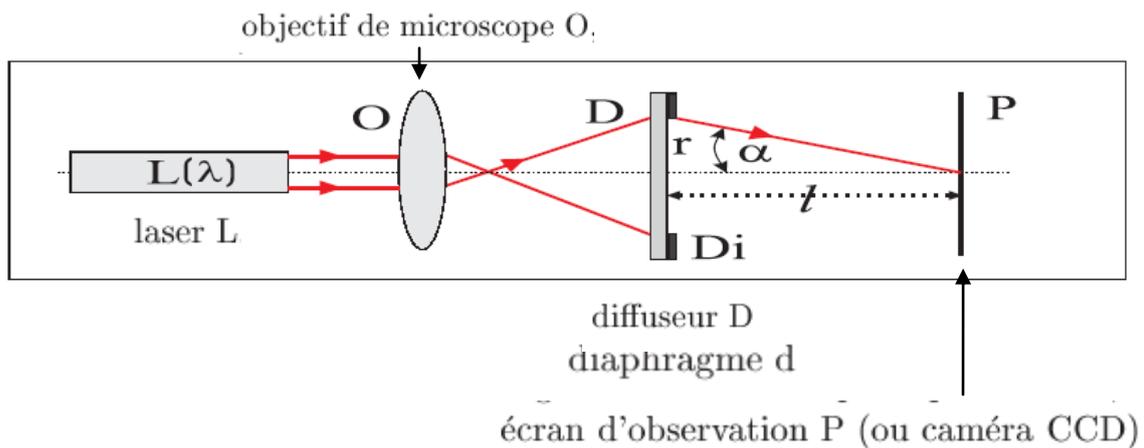
Figure 2 - Photographie du speckle (granularité laser)

- La taille caractéristique des grains du speckle est donnée par :

$$s = \lambda D / \Phi_D$$

(dans le cas de grains provoqués par des éléments de relief de forme circulaire on aura :  $s = 1,22 \lambda D / \Phi_D$  pour un diffuseur de diamètre  $\Phi_D$ ).

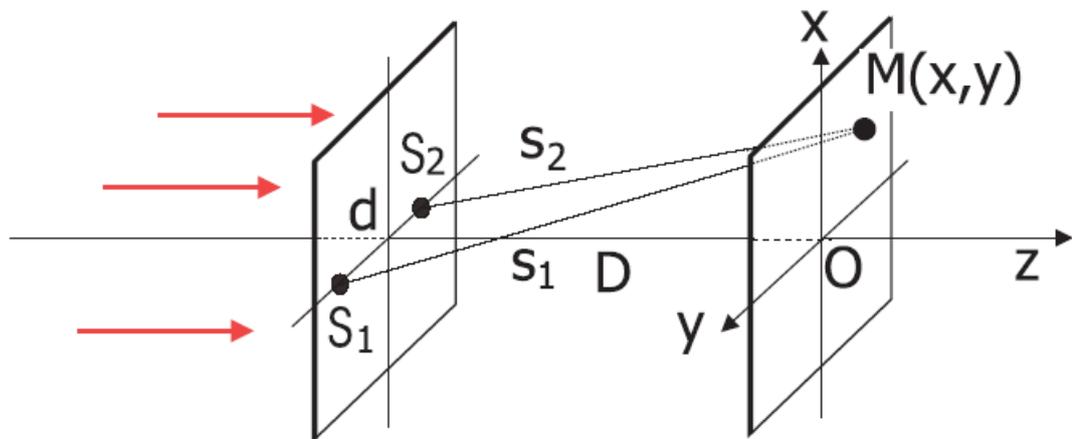
- Le speckle remplit tout l'espace.



On montre que la taille du grain de speckle  $d$  le plus petit

dans le plan d'observation P est  $d = \frac{\lambda}{\alpha}$

## Mesures de déplacements



L'intensité lumineuse observée en M est donnée par :

$$I(M) = (I_1 + I_2) \left[ 1 + C \cos \frac{2\pi(\delta)}{\lambda_0} \right]$$

Elle correspond à une figure d'interférence caractérisée par l'interfrange :

$$i = \frac{\lambda_0 D}{d}$$

## Double exposition d'une plaque photo

La transmittance de la plaque est :

$$t(x, y) = a - b[I(x, y) + I(x + \Delta x, y + \Delta y)]$$

L'amplitude lumineuse diffractée par une telle plaque est la transformée de Fourier de la transmittance :

$$E(\nu_x, \nu_y) = \mathcal{F}[E_0 t(x, y)] = E_0 \mathcal{F}[a - b[I(x, y) + I(x + \Delta x, y + \Delta y)]]$$

$$E(\nu_x, \nu_y) = E_0 a \delta(\nu_x, \nu_y) - E_0 b \mathcal{F}[I(x, y) + I(x + \Delta x, y + \Delta y)]$$

Le théorème de translation de la transformée de Fourier permet d'écrire :

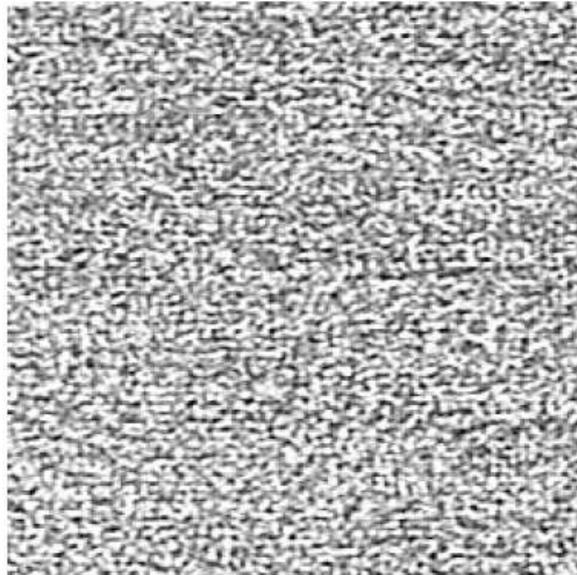
$$\mathcal{F}[I(x + \Delta x, y + \Delta y)] = \exp 2i\pi(\nu_x \Delta x + \nu_y \Delta y) \mathcal{F}[I(x, y)]$$

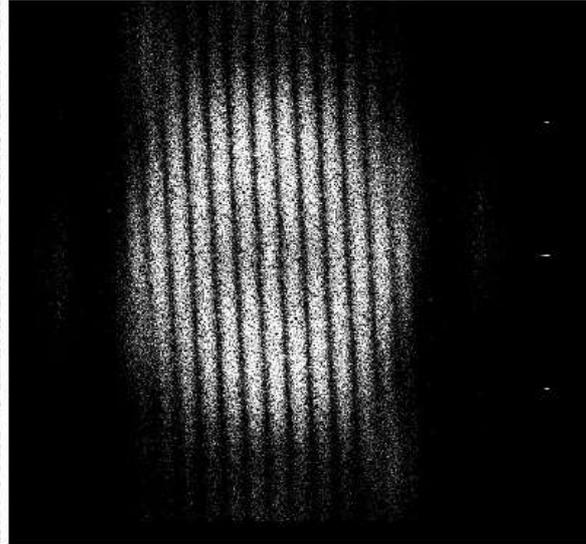
L'amplitude de l'onde transmise s'écrit alors :

$$E(\nu_x, \nu_y) = E_0 a \delta(\nu_x, \nu_y) - E_0 b \mathcal{F}[I(x, y)](1 + \exp 2i\pi(\nu_x \Delta x + \nu_y \Delta y))$$

$$I(\nu_x, \nu_y) = \frac{1}{2} E E^* = \frac{E_0^2 b^2}{2} |\mathcal{F}[I(x, y)](1 + \exp 2i\pi(\nu_x \Delta x))|^2$$

$$I(\nu_x, \nu_y) = \frac{E_0^2 b^2}{2} |\mathcal{F}[I]|^2 \cos^2(\pi \nu_x \Delta x)$$

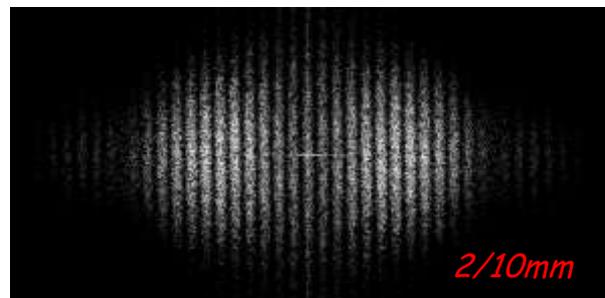
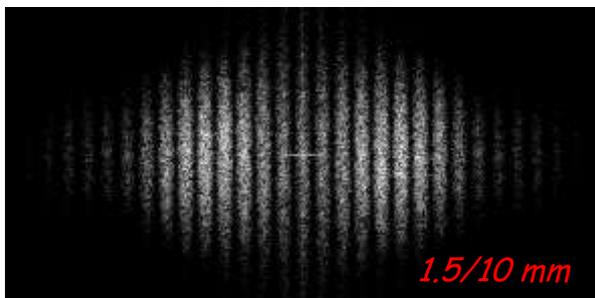
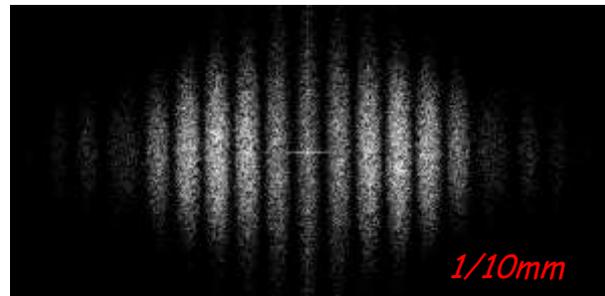
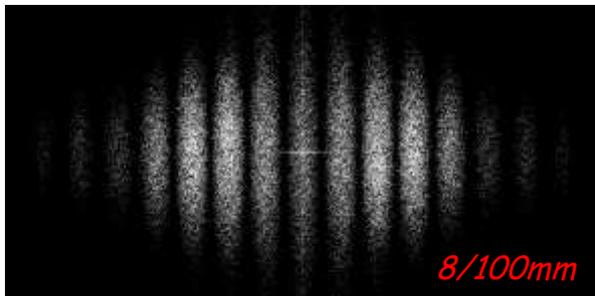
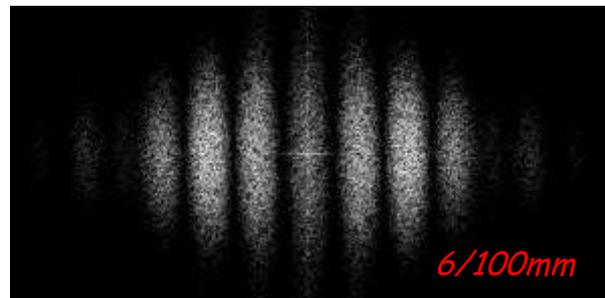
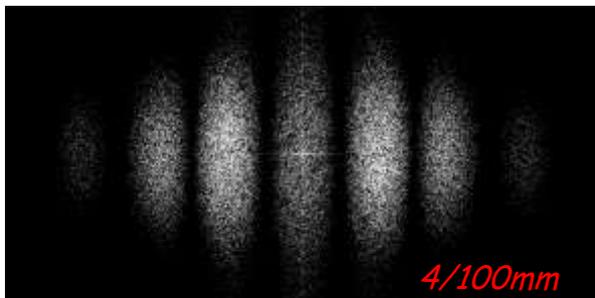
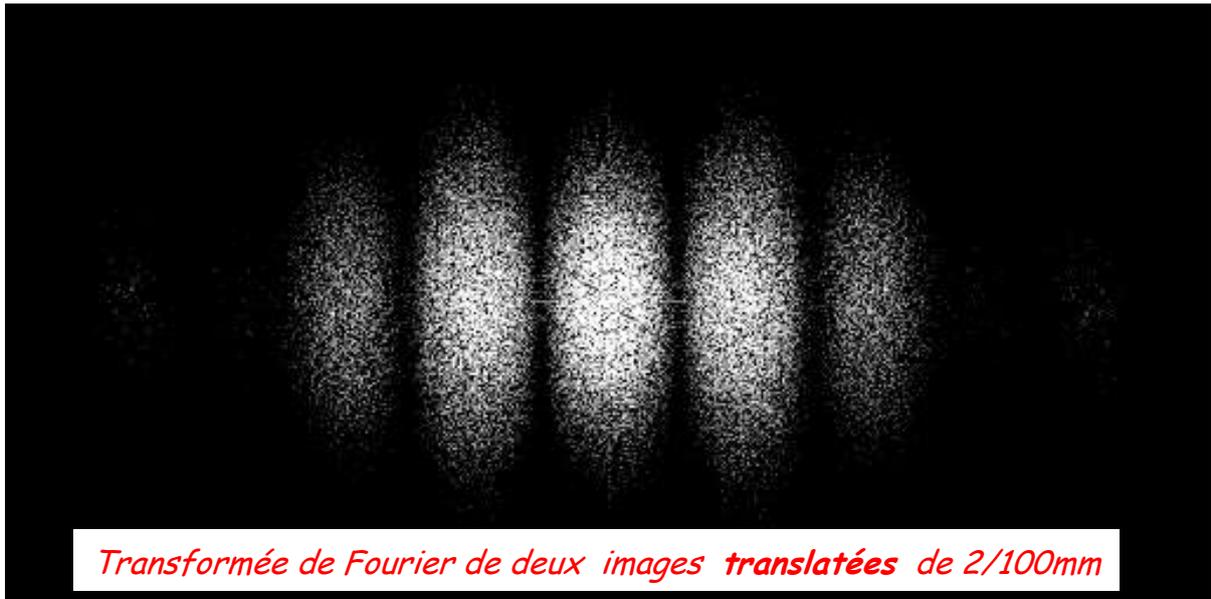




*Optique de Fourier et formation des images*

*Yann VAILLS – date de dernière mise à jour : 06/09/2019*

*Ce cours est disponible à l'adresse suivante : <http://www.cemhti.cnrs-orleans.fr/?nom=Vaills>*



### Expositions multiples d'une plaque photo

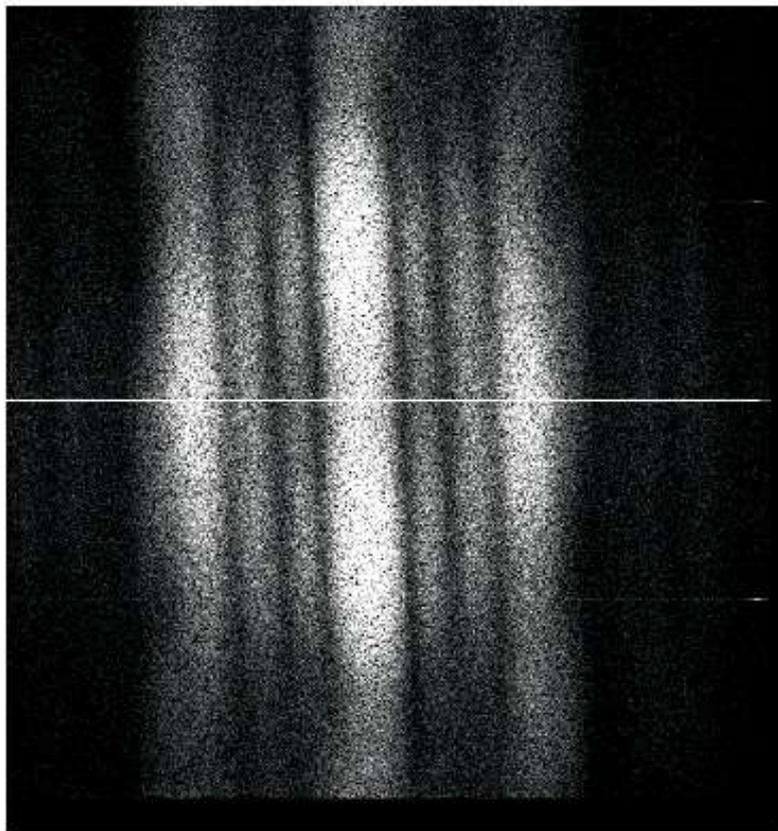
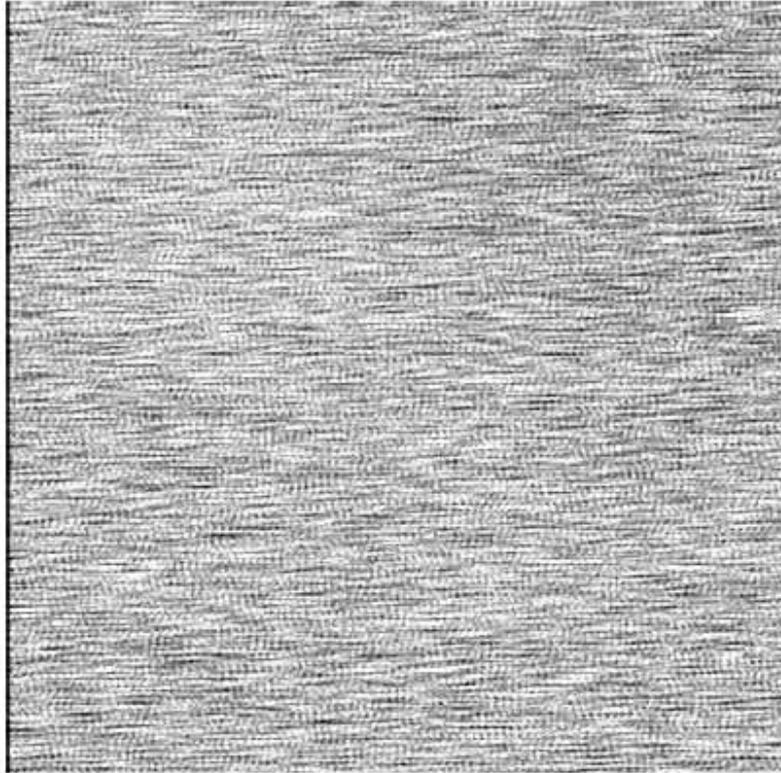
On superpose N images correspondant à N-1 translations  
dans la même direction  
et de même

$$t(x, y) = a - b[I(x) + I(x + \Delta x) + I(x + 2\Delta x) + \dots + I(x + N\Delta x)]$$

$$\begin{aligned} E(\nu_x, \nu_y) &= \mathcal{F}[E_0 t(x, y)] \\ &= E_0 \mathcal{F}[a - b[I(x) + I(x + \Delta x) + I(x + 2\Delta x) + \\ &\quad \dots + I(x + N\Delta x)]] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(\nu_x, \nu_y) &= E_0 a \delta(\nu_x, \nu_y) - E_0 b \mathcal{F}[I(x)](1 + \exp 2i\pi(\nu_x \Delta x) + \exp 2i\pi(\nu_x 2\Delta x) + \dots \\ &\quad + \exp 2i\pi(\nu_x N\Delta x)) \end{aligned}$$

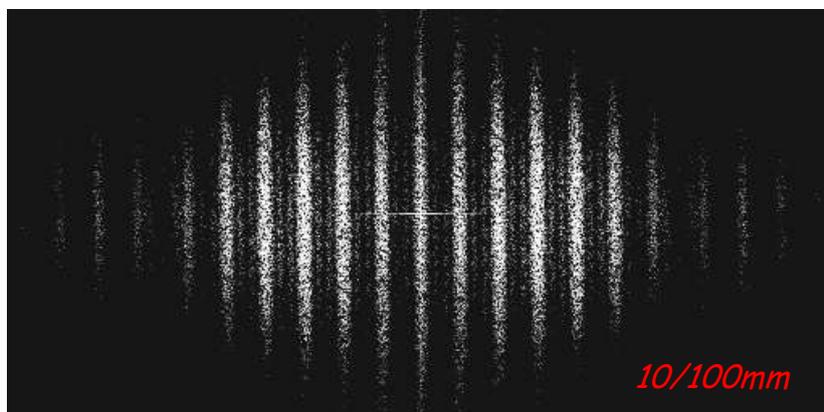
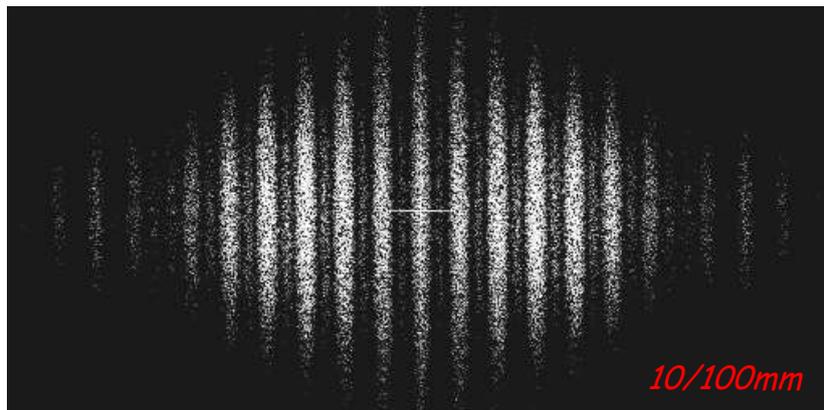
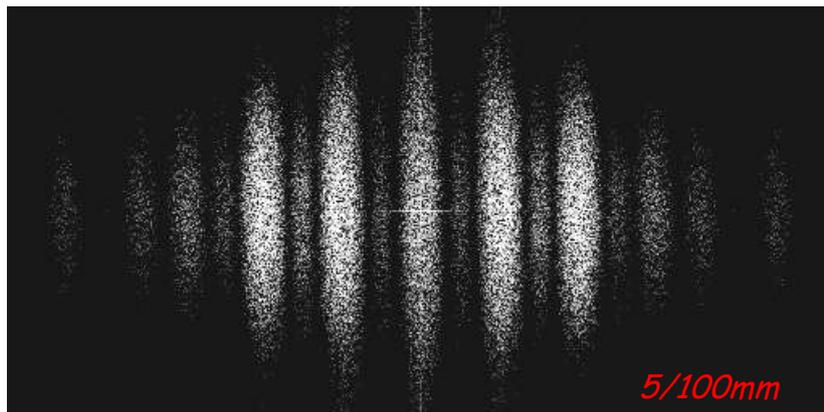
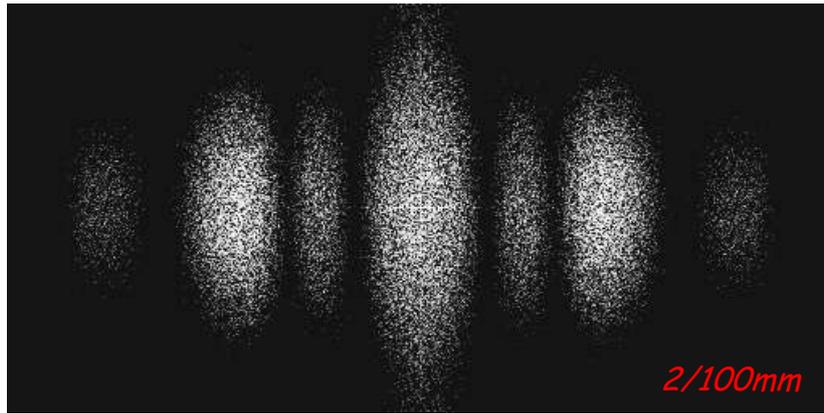
$$I(\nu_x, \nu_y) = \frac{1}{2} E E^* = \frac{E_0^2 b^2}{2} \|\mathcal{F}[I]\|^2 \frac{\sin^2(N\pi\nu_x \Delta x)}{\sin^2(\pi\nu_x \Delta x)}$$



*Optique de Fourier et formation des images*

*Yann VAILLS – date de dernière mise à jour : 06/09/2019*

*Ce cours est disponible à l'adresse suivante : <http://www.cemhti.cnrs-orleans.fr/?nom=Vaills>*



*Optique de Fourier et formation des images*

*Yann VAILLS – date de dernière mise à jour : 06/09/2019*

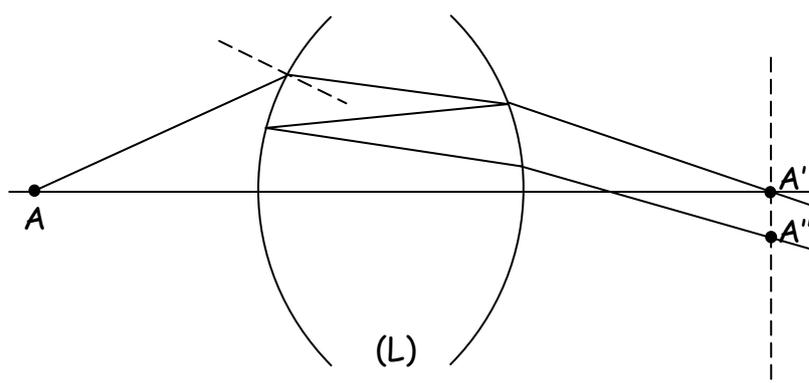
*Ce cours est disponible à l'adresse suivante : <http://www.cemhti.cnrs-orleans.fr/?nom=Vaills>*

*Translations multiples : photos ( 1,2,3) 2 translations  
d'amplitude croissante, photo (4) 3 translations de 1/10mm*

## VI. Composants optiques interférentiels

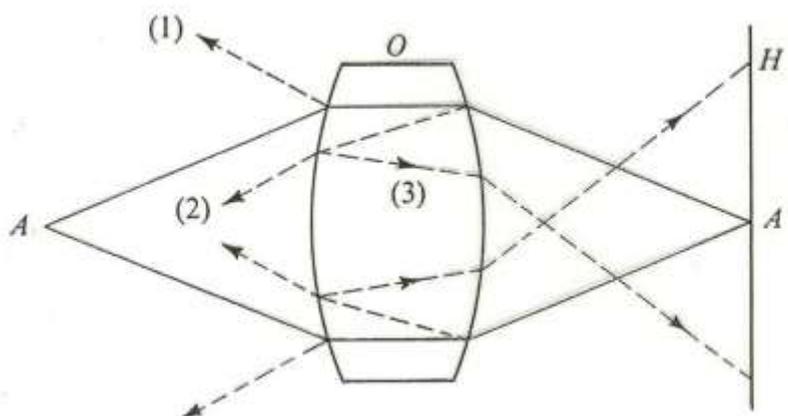
### 1. Couches minces antireflets

Le schéma ci-dessous montre que les réflexions multiples sur les dioptries de la lentille (L) génèrent de multiples images d'un même objet.



Le dépôt d'une couche mince d'épaisseur convenable permet de minimiser l'influence des réflexions multiples sur les dioptries de (L).

Dans l'exemple ci-dessous on considère un matériau d'indice  $n$  sur lequel sont déposées plusieurs couches minces d'indices  $n_i$

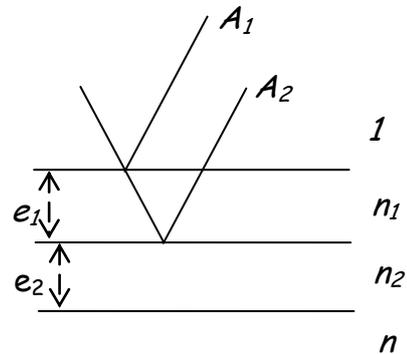


Si l'on prend en compte les deux principaux rayons réfléchis, on l'amplitude totale réfléchie est :

$$A = A_1 + A_2 e^{i\varphi}$$

$$\varphi = \pi + \frac{2\pi}{\lambda_0} 2ne \cos \theta$$

$$I = I_0 (1 + C \cos \varphi)$$



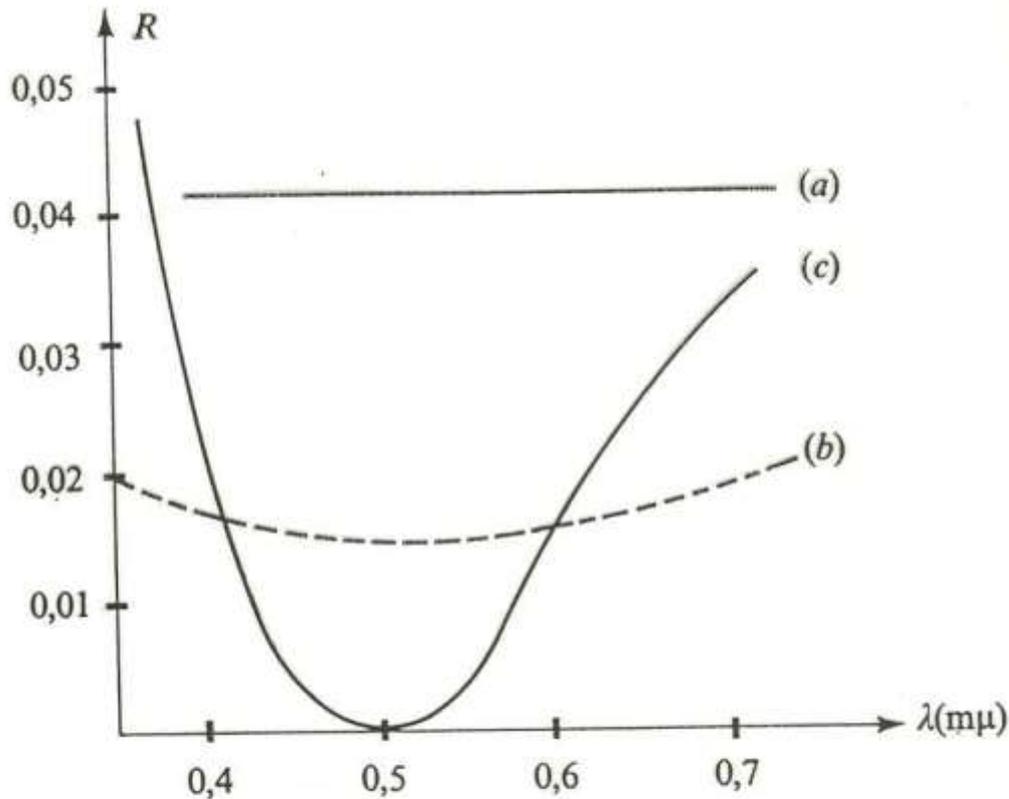
Avec une couche déposée en surface de la lentille on peut notablement diminuer le coefficient de réflexion  $R$

$$n = 1,52 \quad \Rightarrow R_0 = 0,04$$

$$n = 1,52 \quad n_1 = 1,38 \quad \Rightarrow R_1 = 0,02 \text{ pour } n_1 e_1 = \lambda_0/4$$

Le dépôt d'une couche supplémentaire d'épaisseur  $n_2 e_2 = \lambda_0/4$  permet en choisissant bien  $n_2$  d'annuler pratiquement  $R(\lambda_0)$

$$n = 1,52 \quad n_1 = 1,38 \quad n_2 = 1,7 \quad \Rightarrow R_2 \neq 0 \quad \text{pour } n_2 e_2 = \lambda_0/4$$



(a)  $N = 1,52$

(b)  $N = 1,52 \quad n = 1,38 \quad ne = \lambda/4$

(c)  $N = 1,52 \quad n_1 = 1,38 \quad n_2 = 1,7 \quad n_1 e_1 = \lambda/4 = n_2 e_2$

## 2. Filtres interférentiels

Il s'agit de maximiser la lumière transmise pour une longueur d'onde  $\lambda_0$  donnée

L'intensité est maximum pour  $n_1 e = p \lambda_0 / 2$  soit  $e = p \lambda_0 / 2 n_1$

Pour  $n_1 = 1,4$  la transmission se fait de la façon suivante :

$p_1 = 1 \quad \lambda_1 = 1,08 \mu m = 2ne \quad \text{c'est l'infra rouge qui passe}$

$p_2 = 2 \quad \lambda_1 = 0,54 \mu m = 2ne \quad \text{c'est le visible qui passe}$

## 3. Cavités résonantes pour laser

Principe de réalisation : l'effet laser apparaît dans un milieu « actif ». Il est d'autant plus important que la longueur traversée est grande. Techniquement,

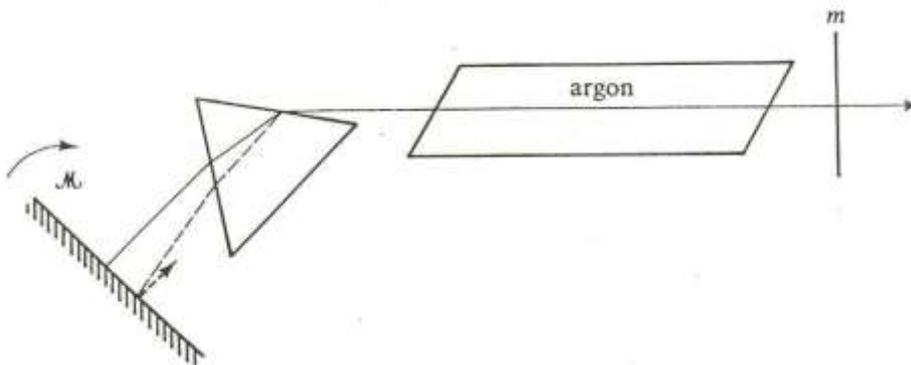
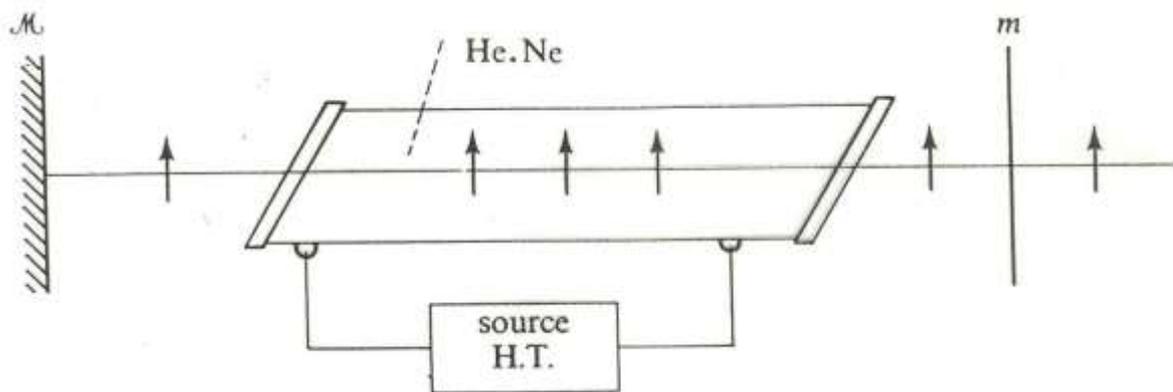
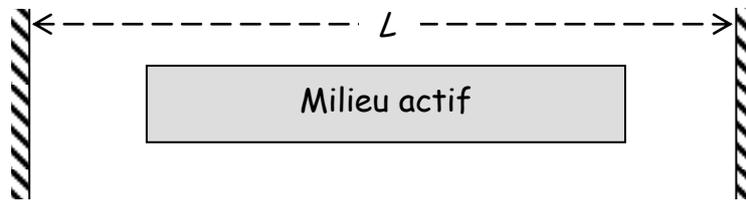
*Optique de Fourier et formation des images*

Yann VAILLS – date de dernière mise à jour : 06/09/2019

Ce cours est disponible à l'adresse suivante : <http://www.cemhti.cnrs-orleans.fr/?nom=Vaills>

pour maximiser cette longueur on place le milieu actif dans un dispositif permettant des passages multiples de la lumière, c'est-à-dire dans une cavité Fabry-Pérot accordée :

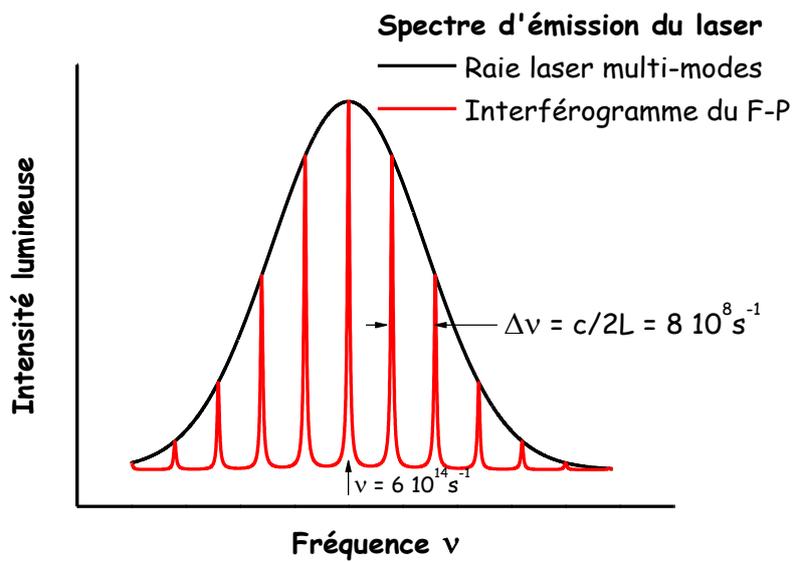
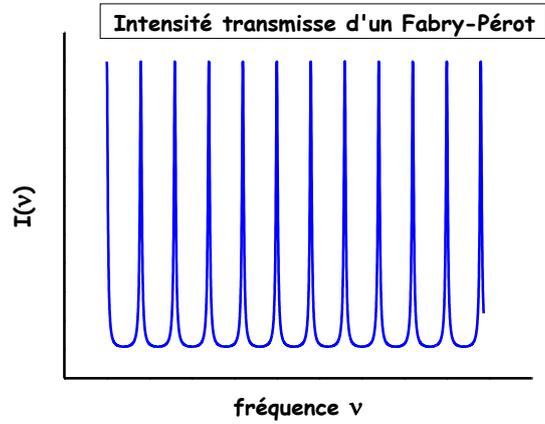
La cavité est accordée lorsque sa longueur est telle que  $(\Delta) = 2L = p\lambda$

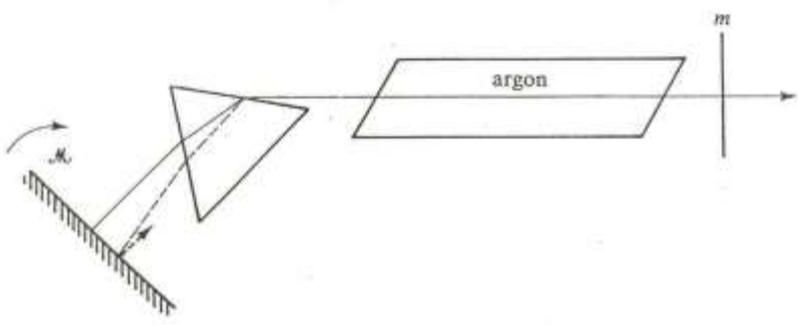
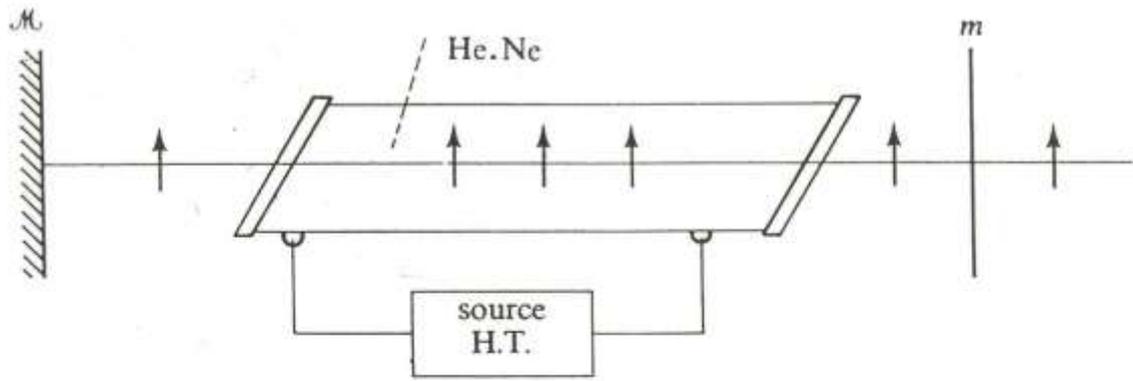


Si un des miroirs n'est pas réflecteur total (ex :  $R = 0,98$ ), une faible partie de la lumière peut sortir de la cavité : c'est le **faisceau laser**

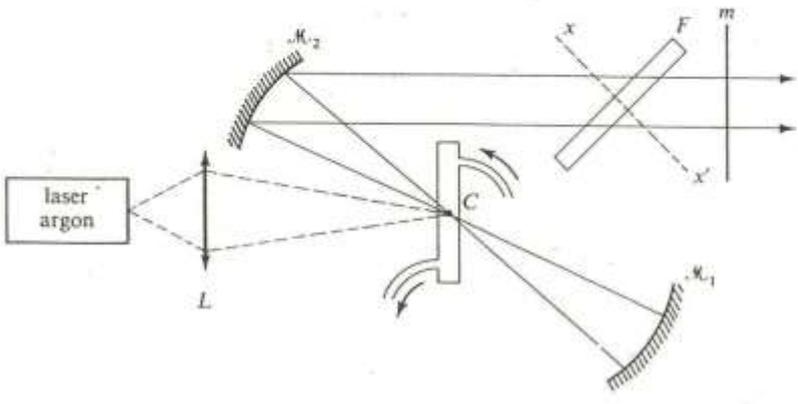
Tout rayonnement à la fréquence  $\nu = p \frac{c}{2L}$  sort de la cavité (qui, pour cette fréquence est résonante).

Ex :  $p = 2L/\lambda$      $L = 20 \text{ cm}$      $\lambda = 500 \text{ nm}$      $p = 800\,000$   
 $\nu = c/\lambda = 6 \cdot 10^{14} \text{ s}^{-1}$      $\Delta\nu = c/2L \cong 8 \cdot 10^8 \text{ s}^{-1}$





5.14. Séparation des radiations dans un laser à argon.



5.16. Laser à colorant accordable. Le laser est « pompé » par un laser à argon.

#### 4. Composants avec milieux anisotropes : polariseurs - compensateurs

Considérons les interférences de deux ondes, une onde  $\vec{E}_1$  à polarisation rectiligne et une onde  $\vec{E}_2$  à polarisation circulaire. Leurs expressions analytiques sont les suivantes :

$$\vec{E}_1 = a_1 \hat{x}$$

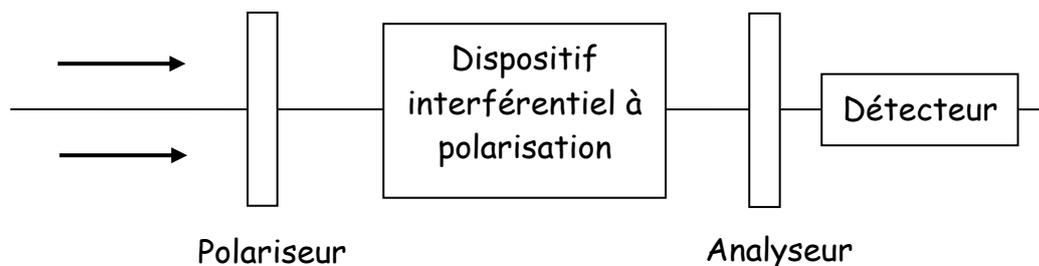
$$\vec{E}_2 = a_2 \hat{x} + b_2 e^{i\psi} \hat{y}$$

La somme de ces 2 ondes est :  $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 e^{i\varphi}$   $I = |\vec{E}_1 + \vec{E}_2 e^{i\varphi}|^2$

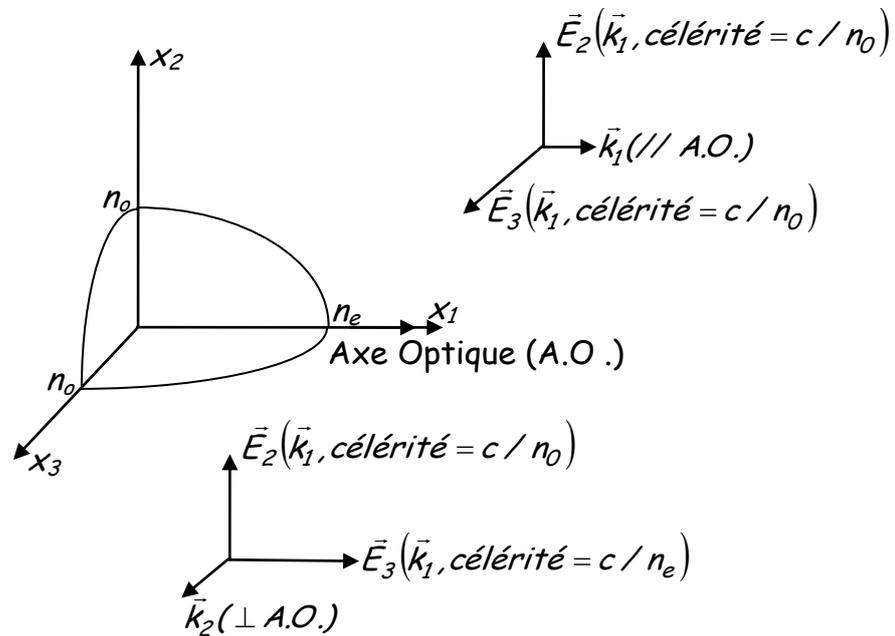
$$\text{Soit : } I = a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2 \cos \varphi + b_2^2$$

Il en résulte que seule la composante de l'onde 2 parallèle à l'onde 1 permet de retrouver la phase  $\varphi$ .

Pour observer des interférences avec le maximum de visibilité dans des dispositifs interférentiels utilisant de la lumière polarisée, il faudra que les ondes qui interfèrent aient le même état de polarisation. Dans la pratique on leur fait traverser un analyseur rectiligne, ce qui conduit à un montage de principe suivant :



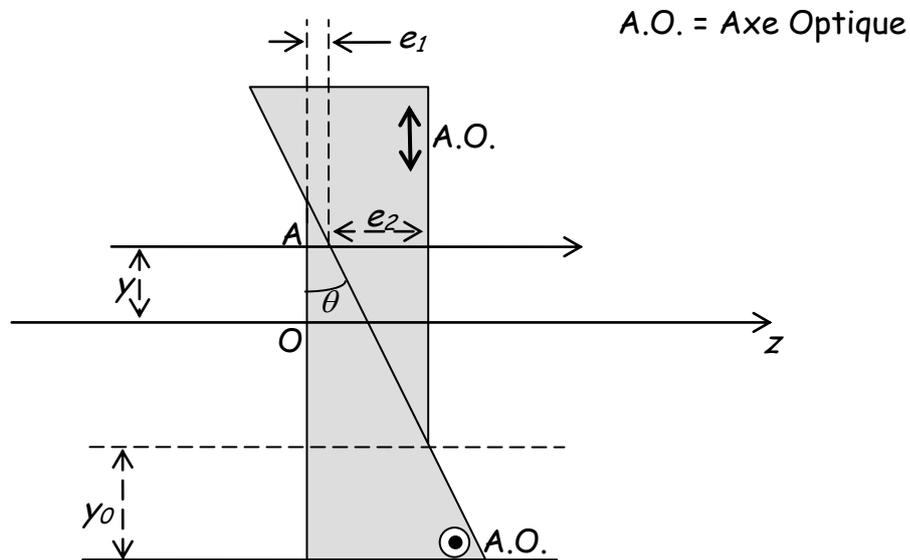
Rappel sur les milieux anisotropes dits « biréfringents » :



$n_o$  = indice ordinaire       $n_e$  = indice extraordinaire  
 $n_e - n_o > 0$  : le milieu est dit uniaxe positif  
 $n_e - n_o < 0$  : le milieu est dit uniaxe négatif

### a. Lumière monochromatique ( $\lambda$ ) :

Compensateurs : exemple du compensateur de Babinet (« à franges »)



Les rayons lumineux qui entrent en  $A$  dans le bi-prisme le déphasage  $\Phi$  en  $A$ , d'ordonnée  $y$ , est :

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 = \frac{2\pi\Delta n}{\lambda_0} (2y - y_0) \tan \theta$$

le déphasage pour une hauteur d'incidence  $y$  donnée dépend de la position relative  $y_0$  des deux prismes (le dispositif apparaît comme une lame d'épaisseur variable).

Entre polariseur et analyseur croisés à  $45^\circ$  des lignes neutres on observe des franges d'interférences. Suivant l'état de polarisation de la lumière incidente les franges se déplacent et leur déplacement permet de déterminer l'état de polarisation de la lumière incidente.

### b. Lumière polychromatique

Exemple : le Filtre de Lyot

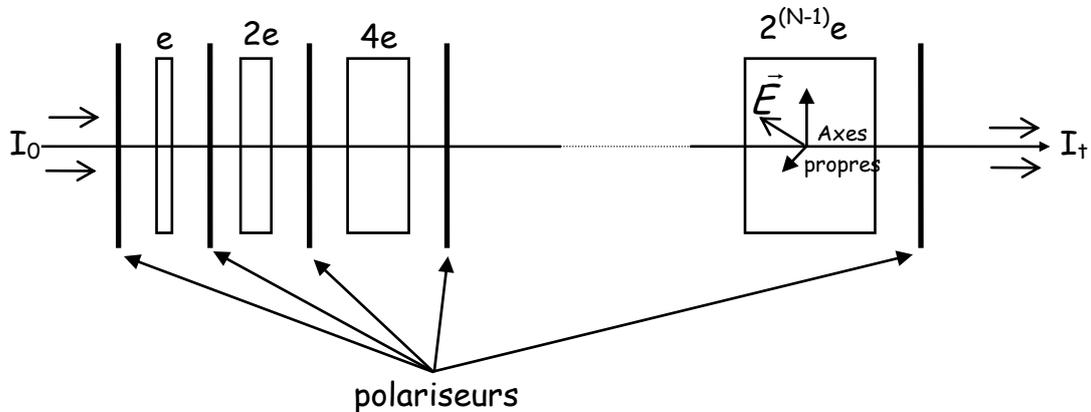
Les lames biréfringentes sont caractérisées par un  $\Delta n$  identique et leurs épaisseurs sont respectivement ;  $e, 2e, 4e, \dots, 2^{n-1}e$ , Leurs lignes neutres sont

*Optique de Fourier et formation des images*

Yann VAILLS – date de dernière mise à jour : 06/09/2019

Ce cours est disponible à l'adresse suivante : <http://www.cemhti.cnrs-orleans.fr/?nom=Vaills>

alignées et ces lames sont séparées par des polariseurs rectilignes dont les directions de transmission sont parallèles entre elles et à 45° des lignes neutres.

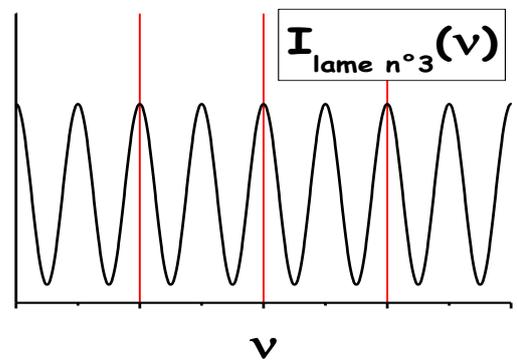
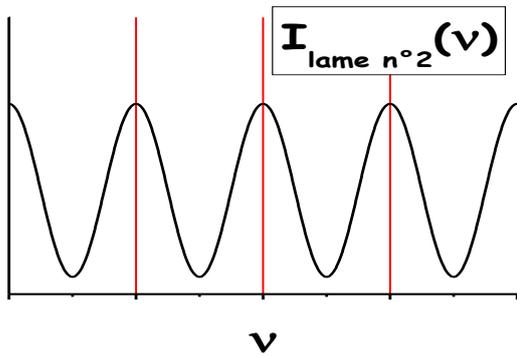
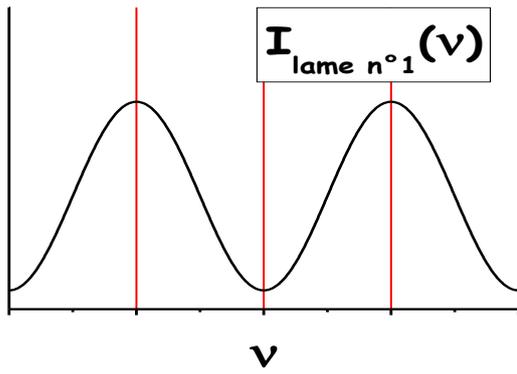


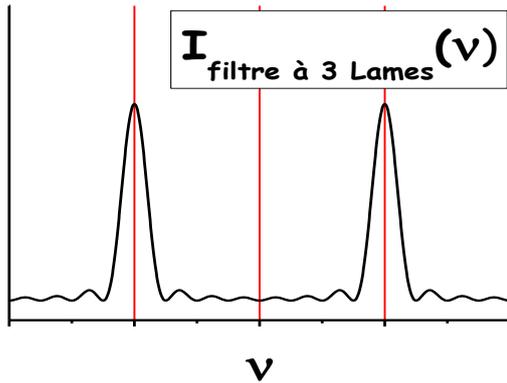
un bloc  $k$  transmet l'intensité  $I_k$  suivante :

$$I_k = \frac{I_{k-1}}{2} (1 + \cos 2^k \Phi) = I_{k-1} \cos^2 2^k \Phi \quad \text{où } \Phi = \frac{2\pi}{\lambda_0} (n_e - n_o) e$$

On peut comprendre la transmission finale en remarquant qu'elle est le produit des différentes transmissions de chaque bloc :

$$I_{N \text{ lames}} = I_0 \prod_{k=1}^N \cos^2 2^{k-2} \Phi$$





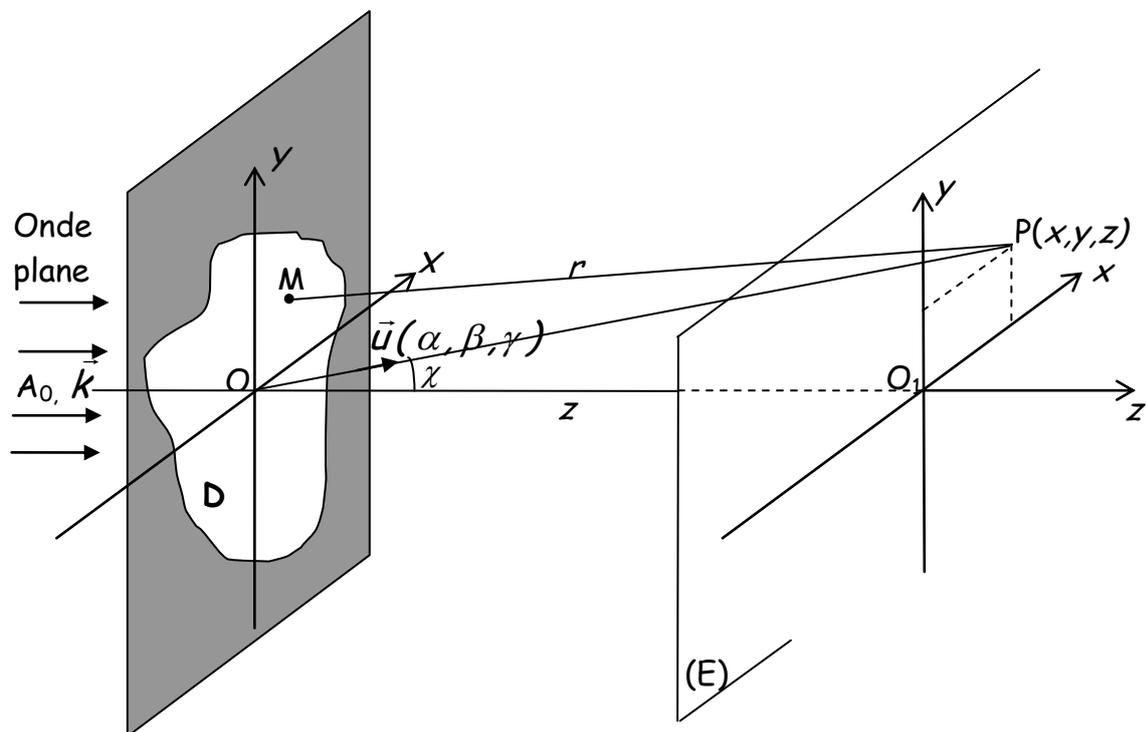
## Chapitre 2

# DIFFRACTION

Lorsqu'on essaie de diminuer l'étendue d'un faisceau lumineux, avec des diaphragmes par exemple, la répartition sur un écran d'observation n'est pas celle que l'on pourrait déduire de l'optique géométrique (Sommerfeld). Le nouveau phénomène qui apparaît, *la diffraction*, a de nombreuses manifestations courantes (ex : voilage à travers lequel on observe une source lumineuse éloignée : l'image géométrique de la source est entourée d'une croix provenant de la diffraction de la lumière par la fine trame du voilage)

### I. Diffraction par un écran

#### 1. Amplitude diffractée



On considèrera deux 2 types d'ondes :

- Les ondes planes progressives monochromatiques (OPPM) :

$$\tilde{A} = A_0 e^{-i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}$$

- Les ondes sphériques progressives monochromatiques (OSPM) :

$$\tilde{A} = \frac{A_0}{r} e^{-i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}$$

Nous appellerons  $t(x,y)$  la transmittance de l'écran, c'est-à-dire l'amplitude transmise par unité de surface.

L'amplitude transmise par l'élément de surface  $dXdY$  est :

$$dA(X,Y) = A_0 t(X,Y) dXdY$$

Le calcul de l'amplitude en  $P$  résulte de l'obstacle rencontré et fait intervenir les équations de Maxwell et les conditions aux limites imposées par le diaphragme  $D$ .

Le calcul fait par Kirchhoff (nécessitant en tout état de cause des approximations) permet de retrouver le résultat de la théorie géométrique de Huygens-Fresnel.

### a. Principe de Huygens

« Chaque point d'une surface d'onde  $\Sigma_0$  peut être considéré comme une source secondaire et la surface d'onde  $\Sigma$  à un instant ultérieur est l'enveloppe des surfaces d'onde sphériques provenant des sources secondaires ».

### b. Principe de Huygens-Fresnel

« Chaque point  $M$  d'une surface d'onde  $\Sigma$  atteinte par la lumière peut être considéré comme une source secondaire émettant une onde sphérique. L'état vibratoire de la source secondaire est proportionnel à celui de l'onde incidente en  $M$  et à l'élément de surface  $d\Sigma$  entourant le point  $M$ . Les vibrations issues des sources secondaires interfèrent entre elles ».

Énoncé ainsi ce principe ramène l'étude de la diffraction à celle d'un problème d'interférences.

Pour Fresnel il s'agit d'un principe, pour nous il s'agit maintenant des conséquences de la théorie électromagnétique (Kirchhoff).

Pour le calcul nous adapterons l'énoncé ci-dessus et dirons :

« Chaque élément  $dS = dXdY$  de la pupille diffractante se comporte donc comme une source secondaire d'ondelettes sphériques. L'amplitude en  $P$  résulte de la somme des amplitudes produites par chaque source élémentaire ».

$$U_z(x, y) = A_0 \iint_D C(\chi) t(X, Y) \frac{e^{ikMP}}{MP} dXdY$$

On montre que  $C(\chi) = \frac{1}{2i\lambda} (1 + \cos \chi)$  et dans l'approximation paraxiale :

$$C(\chi) = \frac{1}{i\lambda}$$

*Optique de Fourier et formation des images*

Yann VAILLS – date de dernière mise à jour : 06/09/2019

Ce cours est disponible à l'adresse suivante : <http://www.cemhti.cnrs-orleans.fr/?nom=Vaills>

$$\text{On a alors : } MP = z + \frac{(x-X)^2 + (y-Y)^2}{2z} - \frac{[(x-X)^2 + (y-Y)^2]^2}{8z^3} + \dots$$

$$\text{D'où : } U_z(x,y) = \frac{A_0}{i\lambda z} \int_{-\infty}^{+\infty} \int t(X,Y) e^{ikMP} dXdY$$

## 2. Diffraction de Fresnel

Les 2 premiers termes du développement de  $MP$  sont conservés, soit :

$$k \frac{[(x-X)^2 + (y-Y)^2]^2}{8z^3} + \dots \ll 1 \text{ rad}$$

les conditions expérimentales correspondent donc à :

$$z^3 \gg \frac{\pi}{4\lambda} [(x-X)^2 + (y-Y)^2]_{\max}^2$$

exemple : ouverture  $\phi \sim 2,5 \text{ cm}$   $\lambda = 600 \text{ nm}$   $z \geq 1 \text{ m}$

Amplitude au point  $P(x,y)$  :

$$U_z(x,y) = \frac{A_0 e^{2i\pi \frac{z}{\lambda}}}{i\lambda z} \int_{-\infty}^{+\infty} \int t(X,Y) e^{\frac{i\pi}{\lambda z} [(x-X)^2 + (y-Y)^2]} dXdY$$

$$\text{soit : } U_z(x,y) = A_0 t ** D$$

\*\* ce symbole représente le produit de convolution à 2 dimensions

$A_0$  amplitude de l'onde plane éclairant l'écran diffractant

$t(x,y)$  transmittance de l'écran source (pupille diffractante)

$$D_z(x, y) = \frac{e^{ikz}}{i\lambda z} e^{i\pi \frac{x^2 + y^2}{\lambda z}} \quad \text{onde sphérique de centre } O$$

$D$  est la réponse percussionnelle (ou « impulsionnelle ») de l'espace libre. C'est l'amplitude complexe observée en un point  $P$  du plan de cote  $z$  et due à une source ponctuelle placée à l'origine  $O$ .

Les expériences classiques de mise en évidence de la diffraction de Fresnel consistent à observer la répartition d'intensité lumineuse au voisinage (ou dans) de l'ombre géométrique de la pupille diffractante sur un écran placé à distance finie.

Remarque : l'intégrale intervenant dans  $U_z(x, y)$  ne peut être calculée que numériquement.

On peut développer  $(x-X)^2 + (y-Y)^2$  afin de faire apparaître une Transformée de Fourier :

$$U_z(x, y) = \frac{A_0 e^{2i\pi \frac{z}{\lambda}}}{i\lambda z} e^{i\frac{\pi}{\lambda z}(x^2 + y^2)} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} t(X, Y) e^{i\frac{\pi}{\lambda z}(X^2 + Y^2)} e^{-2i\pi \left( \frac{x}{\lambda z} X + \frac{y}{\lambda z} Y \right)} dXdY$$

$$U_z(x, y) = \frac{A_0 e^{2i\pi \frac{z}{\lambda}}}{i\lambda z} e^{i\frac{\pi}{\lambda z}(x^2 + y^2)} \quad (2) \text{TF} \left[ t(X, Y) e^{i\frac{\pi}{\lambda z}(X^2 + Y^2)} \right]$$

### 3. Diffraction à l'infini ou diffraction de Fraunhofer

#### a. Approximation

L'expression précédente se simplifie beaucoup si le terme  $e^{i\frac{\pi}{\lambda z}(X^2 + Y^2)}$  peut être considéré comme peu différent de 1

Pour cela les conditions de l'expérience doivent correspondre à :

$$\frac{\pi}{\lambda z} (X^2 + Y^2) \ll 1 \text{ rad}$$

exemple : pour un diamètre d'objet diffractant  $\phi = (X^2 + Y^2)^{1/2} \approx 1,25 \text{ mm}$   
 et  $\lambda = 600 \text{ nm}$

on a :  $\frac{\pi}{\lambda z} (X^2 + Y^2) \approx 10^{-2}$  pour  $z \geq 820 \text{ m}$

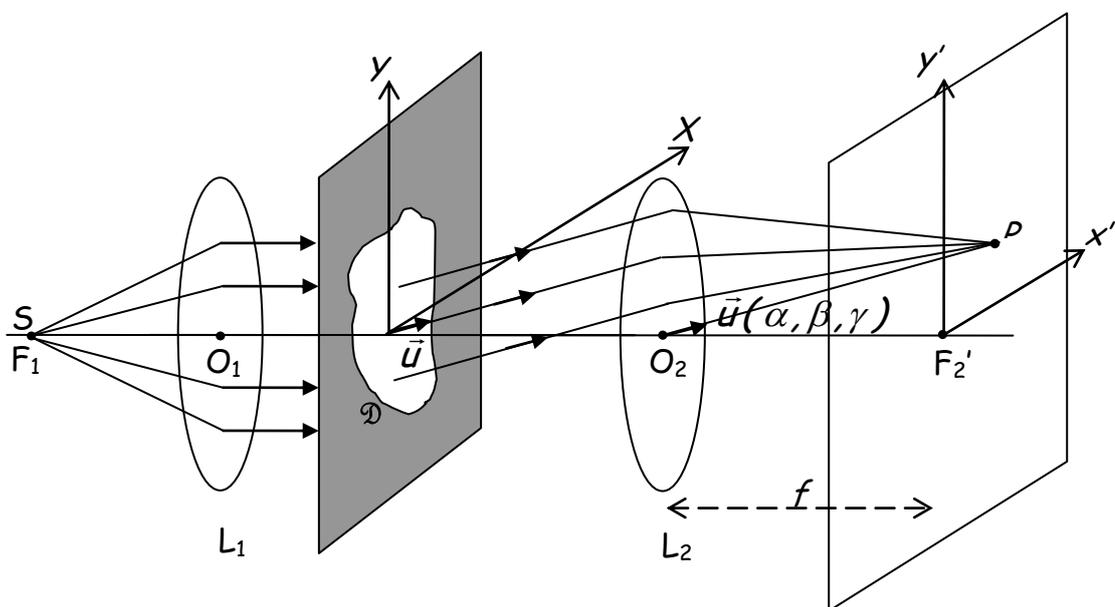
La diffraction dite de **Fraunhofer** correspond à l'approximation ci-dessus, qui sera valable pour  $z$  infini (très grand devant les dimensions de l'objet diffractant). On parlera de diffraction « à l'infini ».

Dans les expressions analytiques les ondes sphériques deviennent alors planes et le terme  $e^{i\frac{\pi}{\lambda z}(X^2+Y^2)}$  peut être posé comme égal à 1.

Finalement l'amplitude en un point  $P$  de l'écran d'observation devient :

$$U_{\infty}(x, y) = A_0 \text{ }^{(2)}\text{TF}[t(X, Y)]$$

Concrètement pour observer la diffraction à l'infini, on ramène le point d'observation à distance finie en interposant une lentille sur le trajet du faisceau diffracté. On effectue l'observation dans le plan focal image de celle-ci.



La source ponctuelle  $S$ , placée au foyer objet de la lentille  $L_1$ , fournit un faisceau parallèle qui éclaire l'ouverture  $D$ . L'observation à l'infini correspondant à la direction  $\vec{u}$  se fait dans le plan focal image de  $L_2$  en  $P$ .

Remarques :

- Selon les lois de l'optique géométrique,  $L_1$  et  $L_2$ , parfaitement stigmatiques, ne devraient donner qu'un point brillant en  $F_2'$
- La distance  $L_1L_2$  ne joue aucun rôle.

**b. Dans l'approximation paraxiale on a :**

$$\alpha = u_x = \frac{x'}{f} \quad \beta = u_y = \frac{y'}{f} \quad \gamma = u_z \sim 1$$

Amplitude diffractée :

$$U_f(x', y') = A_0 \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} t(X, Y) e^{-\frac{2i\pi}{\lambda} \left( \frac{x'}{f} X + \frac{y'}{f} Y \right)} dXdY$$

on pose et on définit les **fréquences spatiales** :

$$u = \frac{x'}{\lambda f} = \frac{\theta_{x'}}{\lambda} \quad \text{et} \quad v = \frac{y'}{\lambda f} = \frac{\theta_{y'}}{\lambda}$$

l'amplitude diffractée à l'infini s'écrit donc :

$$U_f(u, v) = A \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} t(X, Y) e^{-2i\pi(uX + vY)} dXdY$$

l'éclairement sera :

$$I_f(u, v) = I_0 \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} t(X, Y) e^{-2i\pi(uX + vY)} dXdY \right|^2$$

*Optique de Fourier et formation des images*

Yann VAILLS – date de dernière mise à jour : 06/09/2019

Ce cours est disponible à l'adresse suivante : <http://www.cemhti.cnrs-orleans.fr/?nom=Vaills>

la figure de diffraction de Fraunhofer est définie par :

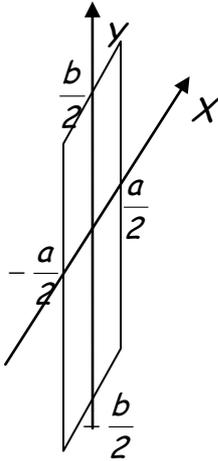
$$\frac{I_f(x', y')}{I_f(0,0)} = \left| {}^{(2)}TF(t(X, Y)) \right|^2$$

Ce résultat donne la « *figure de diffraction de Fraunhofer* »

### c. Exemples de diffraction à l'infini

#### Pupille rectangulaire

Un élément de surface  $dXdY$  entourant un point  $M(X,Y)$  diffracte en  $P(x',y')$  une amplitude  $dA(x',y')$  donnée par :



$$dA(x', y') = \tilde{A} e^{-2i\pi \frac{x'X + y'Y}{\lambda f}} dXdY$$

soit une amplitude totale :

$$A(x', y') = \tilde{A} \iint_D e^{-2i\pi \frac{x'X + y'Y}{\lambda f}} dXdY$$

$$A(x', y') = \tilde{A} \int_{-b/2}^{b/2} \int_{-a/2}^{a/2} e^{-2i\pi \frac{x'X + y'Y}{\lambda f}} dXdY$$

$$A(x', y') = ab \frac{\lambda f}{\pi x' a} \sin\left(\frac{\pi x' a}{\lambda f}\right) \frac{\lambda f}{\pi y' b} \sin\left(\frac{\pi y' b}{\lambda f}\right)$$

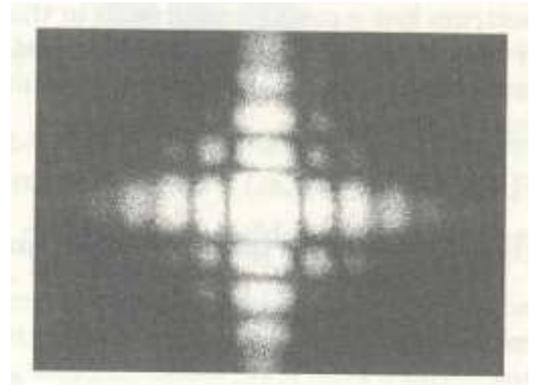
en introduisant les fréquences spatiales

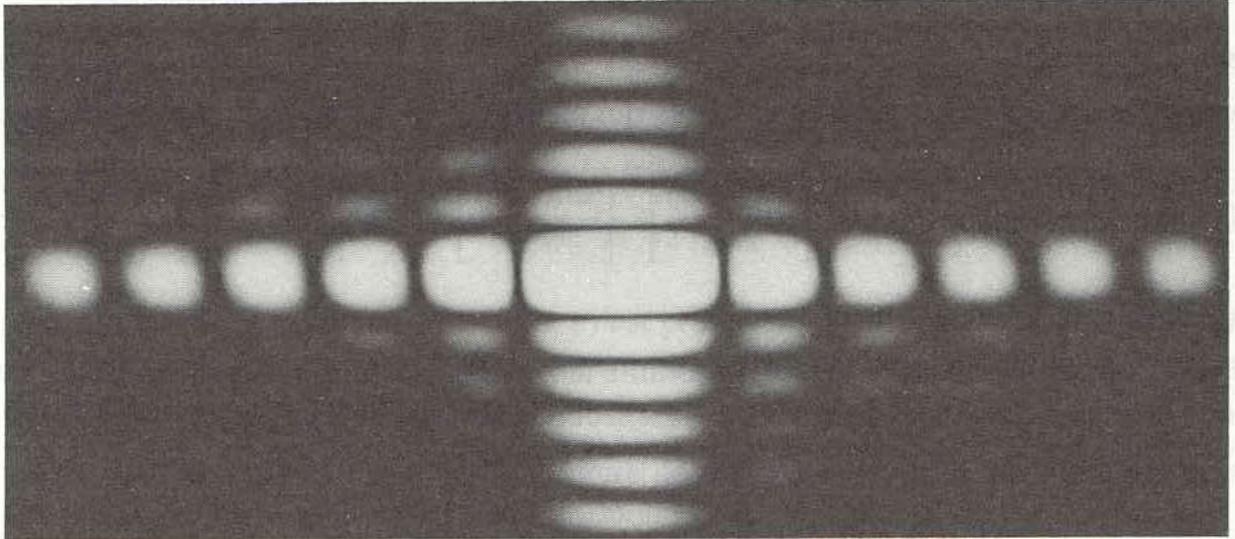
$$u = \frac{x'}{\lambda f} = \frac{\theta_{x'}}{\lambda} \quad \text{et} \quad v = \frac{y'}{\lambda f} = \frac{\theta_{y'}}{\lambda}$$

$$A(u, v) = ab \operatorname{sinc}(\pi u a) \operatorname{sinc}(\pi v b)$$

et

$$I(u, v) = a^2 b^2 \operatorname{sinc}^2(\pi u a) \operatorname{sinc}^2(\pi v b)$$





### Cas d'une fente fine

Il s'agit d'une fente rectangulaire pour laquelle la largeur  $a$  est très inférieure à la hauteur  $b$ .

L'étude précédente nous montre que dans ces conditions les minima dans la direction  $Oy$  de la hauteur  $b$  se resserrent lorsque  $b$  croit :  $\frac{\lambda}{b} \rightarrow 0$

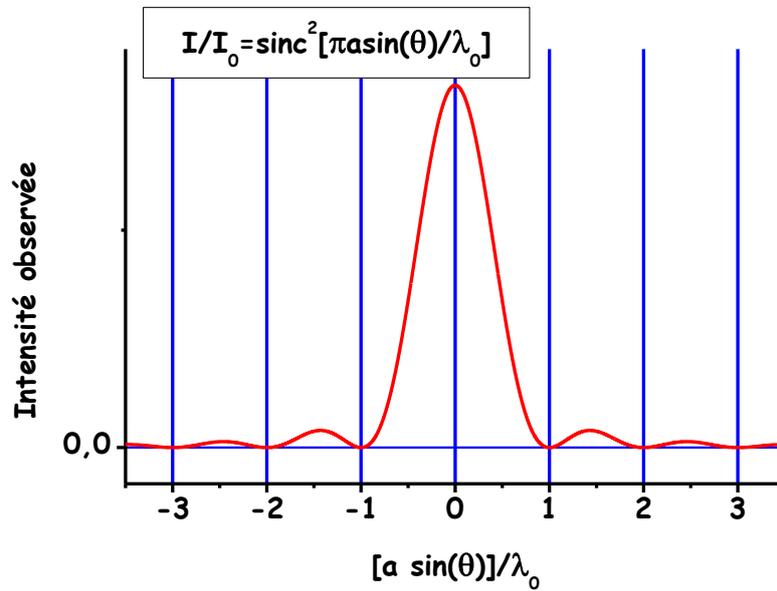
$$b \frac{\sin\left(\frac{\pi y' b}{\lambda f}\right)}{\frac{\pi y' b}{\lambda f}} \rightarrow \delta\left(\frac{y'}{\lambda f}\right) = \delta(v)$$

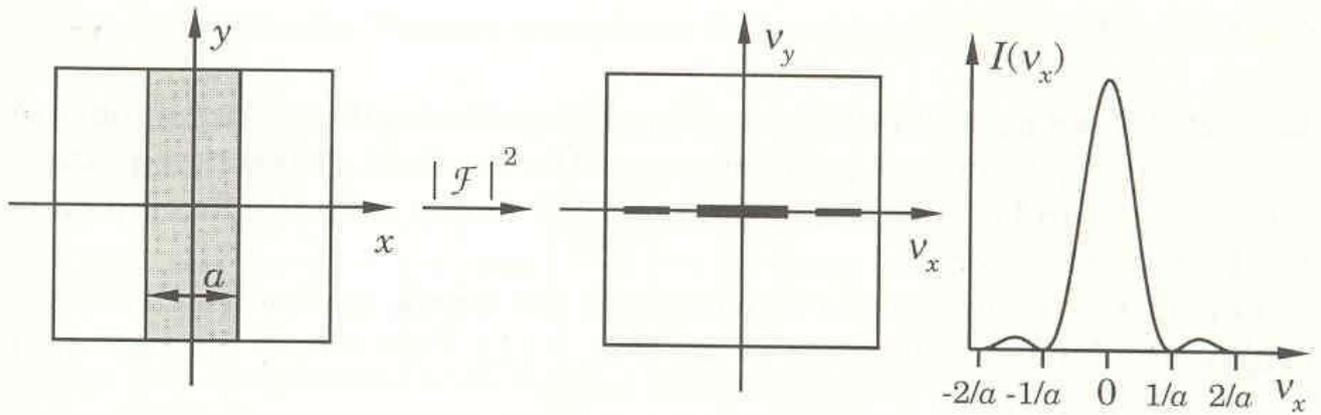
Toute l'intensité diffractée se retrouve sur l'axe  $Ox$  (direction de la largeur  $a$ )  
 Pour  $b \gg a$  et  $ab = C^e$  on aura pour l'intensité diffractée l'expression suivante :

$$I(x', y') = a^2 \left( \frac{\sin\left(\frac{\pi x' a}{\lambda f}\right)}{\frac{\pi x' a}{\lambda f}} \right)^2 \delta(y')$$

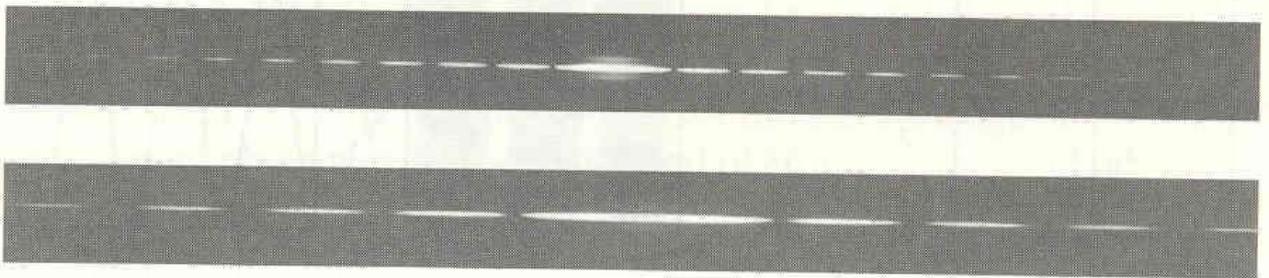
soit :  $I(\alpha, \beta) = a^2 \operatorname{sinc}^2\left(\frac{\pi\alpha a}{\lambda}\right) \delta(\beta)$

ou encore :  $I(u, v) = a^2 \operatorname{sinc}^2(\pi u a) \delta(v)$



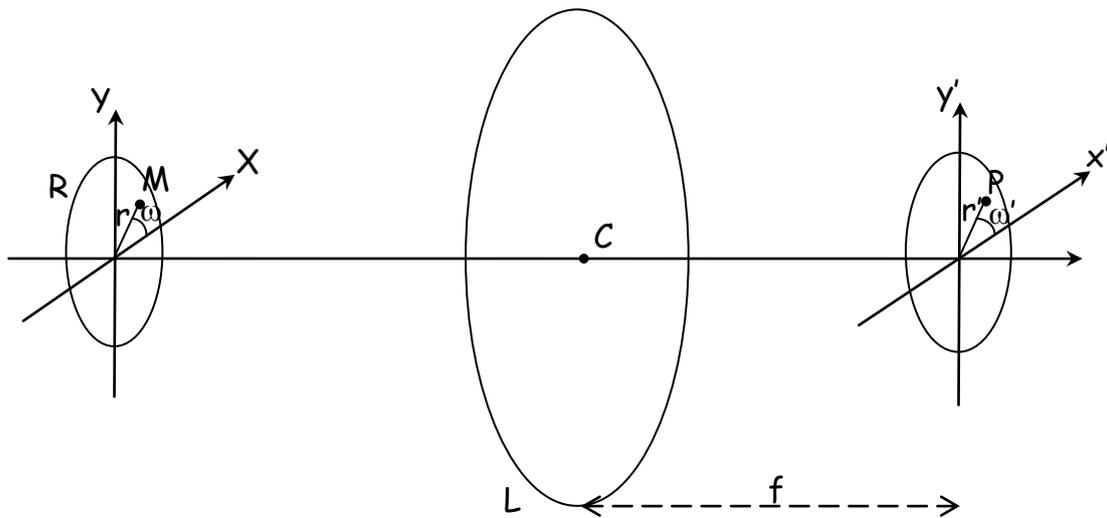


**Fig. 9.8.** Infinitely long slit of finite width and its power spectrum.



**Fig. 9.9.** Two experimentally obtained spectra of a long adjustable slit. The slit width  $a$  is smaller in the lower spectrum.

## Pupille circulaire



$$X = r \cos \omega$$

$$Y = r \sin \omega$$

$$x' = r' \cos \omega'$$

$$y' = r' \sin \omega'$$

la transparence pupillaire est :

$$t(X, Y) = 1 \text{ si } r = \sqrt{X^2 + Y^2} < R$$

$$= 0 \text{ si } r > R$$

l'amplitude diffractée en P est :

$$A(P) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} t(X, Y) e^{-\frac{2i\pi}{\lambda f} (x'X + y'Y)} dXdY$$

soit :

$$A(P) = \int_0^R \int_0^{2\pi} e^{-\frac{2i\pi r r'}{\lambda f} (\cos \omega \cos \omega' + \sin \omega \sin \omega')} r dr d\omega$$

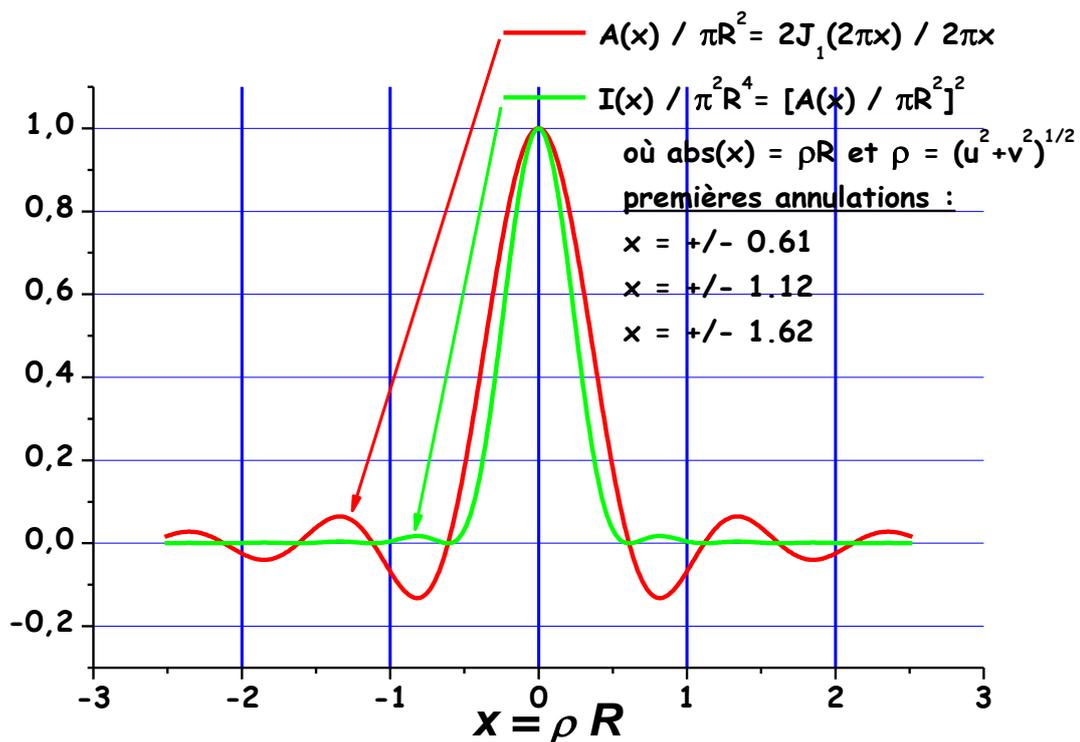
$$A(P) = \int_0^R \int_0^{2\pi} e^{-\frac{2i\pi r r'}{\lambda f} \cos(\omega - \omega')} r dr d\omega$$

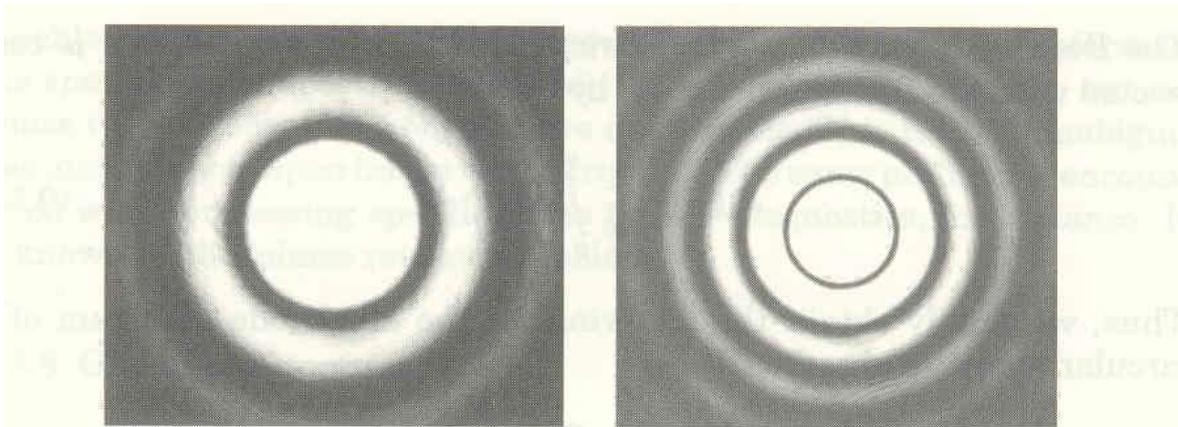
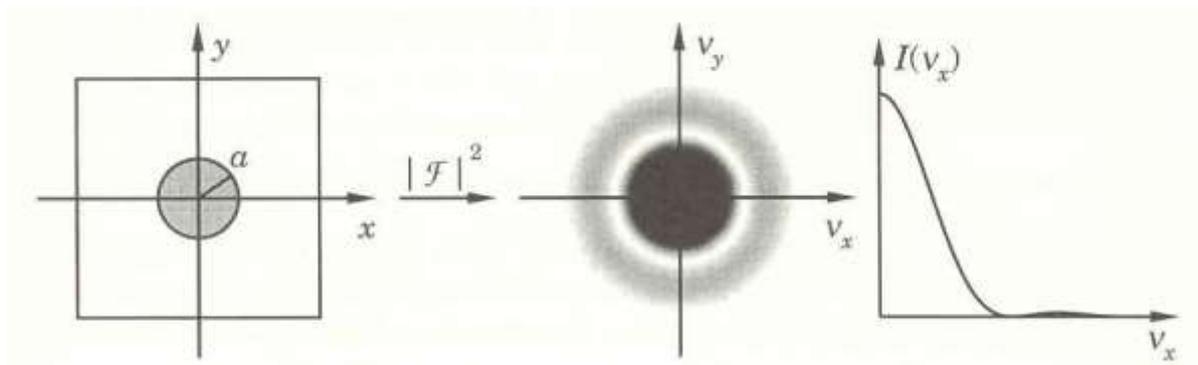
$$A(P) = \int_0^R \int_0^{2\pi} e^{-2i\pi \rho r \cos \omega} r dr d\omega = \pi R^2 \frac{2J_1(2\pi \rho R)}{2\pi \rho R}$$

$$\text{où } \rho = \frac{\sqrt{x'^2 + y'^2}}{\lambda f} = \sqrt{u^2 + v^2}$$

$$\text{et } J_1(u) = \frac{1}{u_0} \int_0^{u_0} J_0(u) du \quad \text{et} \quad J_0(u) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{iu \cos \alpha} d\alpha$$

$J_0$  et  $J_1$  sont les fonctions de Bessel d'ordre 0 et 1





**Fig. 9.14.** The diffraction patterns of circular apertures of different radii.



## II. Transformation de Fourier et diffraction de Fraunhofer

Les TF apparaissant en optique sont à deux dimensions. Lorsque les calculs sont tels que les variables se séparent on peut écrire :

$$t(X, Y) = g(X)h(Y) \quad \text{et}$$

$$TF[t(X, Y)] = \hat{f}(u, v) = TF[g(X)]TF[h(Y)] \quad \text{soit :}$$

$$\hat{f}(u, v) = \hat{g}(u)\hat{h}(v)$$

Les rappels ci-dessous sont faits à une dimension, quelques précautions à prendre lorsque l'on a deux variables seront signalées ensuite.

$$F(u) = TF[f(x)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-2i\pi ux} dx = \hat{f}(u)$$

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(u)e^{2i\pi ux} du = TF^{-1}[\hat{f}(u)]$$

$$TF^{-1}[TF[f(x)]] = f(x) , \quad TF^{-1}[TF[\hat{f}(u)]] = \hat{f}(u)$$

Pour signifier que  $\hat{f}(u)$  est la Transformée de Fourier de  $f(x)$ , on utilisera la notation suivante :  $f(x) \Leftrightarrow \hat{f}(u)$

On aura donc en particulier :

$$\hat{f}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx \quad \text{et} \quad f(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(u)du$$

## 1. Propriétés de la TF

Il s'agit ici de mettre en relation les principales propriétés de la TF avec les résultats de la diffraction.

**Linéarité :**

$$TF[af] = a TF[f] \quad a \text{ constante} \in \mathbb{R}$$

Si l'amplitude incidente est multipliée par  $a$ , l'amplitude diffractée est multipliée par le même facteur

$$TF[f + g] = TF[f] + TF[g]$$

Deux pupilles diffractantes sur un même écran produisent une amplitude diffractée qui est la somme des amplitudes fournies séparément par chacune d'elles. Ceci entraîne des phénomènes d'interférences.

**Symétrie et parité :**

$$f(x) = P(x) + Q(x) \quad P(x) \text{ et } Q(x) \text{ parties paire et impaire de } f(x)$$

$$\hat{f}(u) = 2 \int_0^{+\infty} P(x) \cos(2\pi ux) dx - 2i \int_0^{+\infty} Q(x) \sin(2\pi ux) dx$$

**Affinité :**

$$f(ax) \Leftrightarrow \frac{1}{|a|} \hat{f}\left(\frac{u}{a}\right) \quad a \text{ constante} \in \mathbb{R}$$

Si les dimensions d'une pupille sont multipliées par  $a$ , celles de la figure de diffraction sont divisées par le  $a$

**Translation :**

$$TF[f(x - a)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x - a) e^{-2i\pi ux} dx = e^{-2i\pi ua} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-2i\pi ux} dx$$

$$f(x - a) \Leftrightarrow e^{-2i\pi au} \hat{f}(u)$$

une translation de la pupille entraîne un déphasage de l'amplitude diffractée, et n'a donc aucune conséquence sur l'intensité. L'image diffractée est inchangée par une translation de la pupille diffractante.

### **Transposition-conjugaison**

$$f(-x) \Leftrightarrow \hat{f}(-u)$$

$$f^*(x) \Leftrightarrow \hat{f}^*(-u)$$

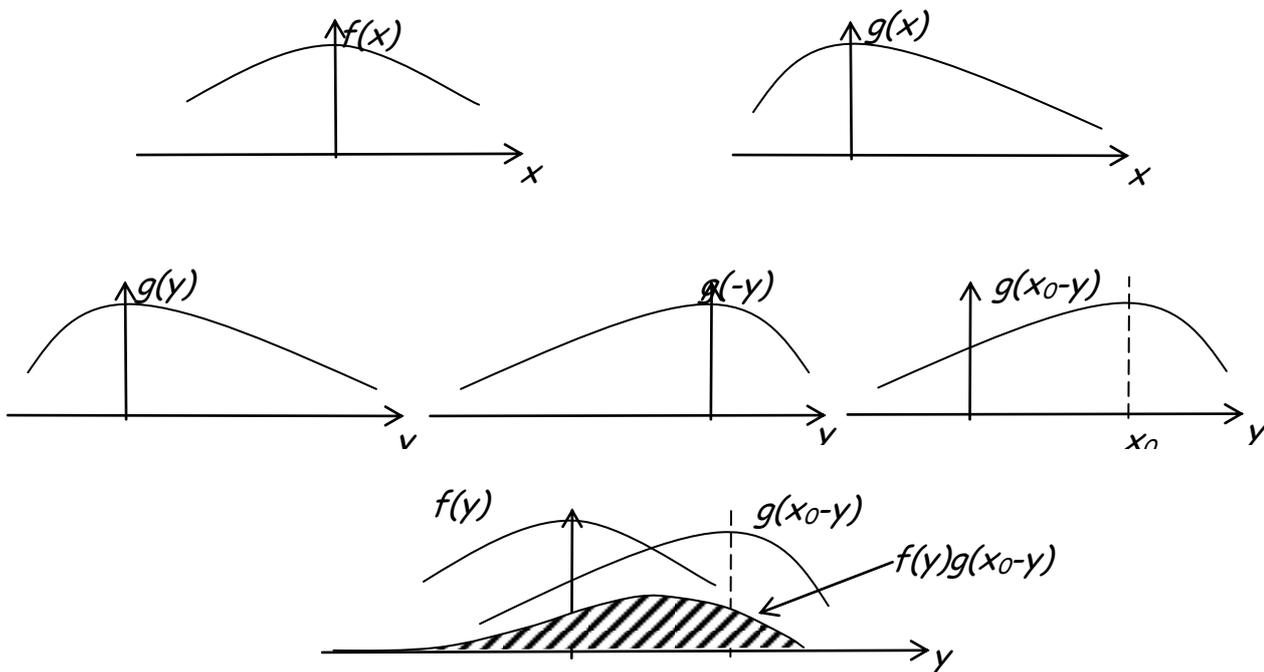
$$f^*(-x) \Leftrightarrow \hat{f}^*(u)$$

## 2. Produit de convolution :

$$f(x) \Leftrightarrow \hat{f}(u) \quad g(x) \Leftrightarrow \hat{g}(u)$$

on appelle produit de convolution et on note le produit défini par :

$$h(x) = f(x) * g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_0)g(x - x_0)dx_0$$



La surface hachurée représente le produit de convolution :

$$h(x) = f(x) * g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)g(x - y)dy$$

## Transformée de Fourier

$$f(x) * g(x) \Leftrightarrow \hat{f}(u)\hat{g}(u)$$

par réciprocity on a :

$$f(x)g(x) \Leftrightarrow \hat{f}(u)*\hat{g}(u)$$

### Commutativité du produit de convolution

$$f(x)*g(x) = g(x)*f(x) \Leftrightarrow \hat{f}(u)\hat{g}(u)$$

### Distributivité du produit de convolution

$$f(x)*[g_1(x)+g_2(x)] = f(x)*g_1(x)+f(x)*g_2(x)$$

### Associativité du produit de convolution

$$f(x)*[g(x)*h(x)] = [f(x)*g(x)]*h(x) \Leftrightarrow \hat{f}(u)\hat{g}(u)\hat{h}(u)$$

## 3. Corrélation - Autocorrélation

On définit le produit de corrélation de deux fonctions par :

$$c(x) = f(x) \otimes g(x) = f(x) * g^*(-x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_0)g^*(x_0 - x)dx_0$$

ce produit n'est pas commutatif

### Autocorrélation :

$$f(x) \otimes f(x) \Leftrightarrow \hat{f}^*(u)\hat{f}(u) = |\hat{f}(u)|^2$$

### Identité de Parseval :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(u)|^2 du$$

#### 4. Double TF :

$$TF[TF[f(x)]] = TF \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-2i\pi ux} dx \right] = TF[\hat{f}(u)]$$

$$TF[TF[f(x)]] = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(u) e^{-2i\pi ux} du$$

on fait un changement de variable suivant :  $u \rightarrow -v$

$$TF[TF[f(x)]] = \int_{+\infty}^{-\infty} -\hat{f}(-v) e^{2i\pi vx} dv = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(-v) e^{2i\pi vx} dv$$

$$TF[TF[f(x)]] = TF^{-1}[\hat{f}(-v)] = f(-x)$$

$$\boxed{TF[TF[f(x)]] = f(-x)}$$

de même on a :

$$\boxed{TF[f(x)] = TF^{-1}[f(-x)]}$$

#### 5. Les distributions

Elles sont utilisées en optique pour symboliser des transmittances « particulières »

a. Porte rectangulaire de largeur a :  $\Pi\left(\frac{x}{a}\right)$  ou

$$\text{rect}\left(\frac{x}{a}\right)$$

Cette fonction symbolise une fente de largeur  $a$  et de hauteur infinie est appelée « fonction porte ».

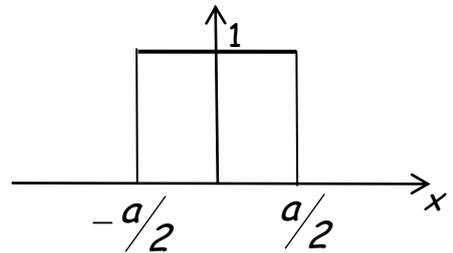
Elle est définie de la façon suivante :

*Optique de Fourier et formation des images*

Yann VAILLS – date de dernière mise à jour : 06/09/2019

Ce cours est disponible à l'adresse suivante : <http://www.cemhti.cnrs-orleans.fr/?nom=Vaills>

$$\begin{aligned}\Pi\left(\frac{x}{a}\right) &= 1 \quad x \in \left[-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right] \\ &= 0 \quad x \notin \left[-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right]\end{aligned}$$



TF Porte rectangulaire :

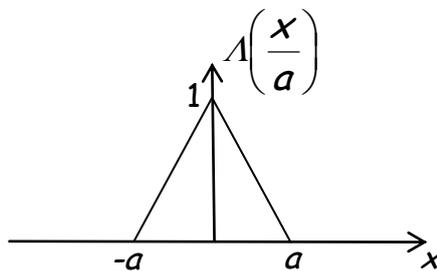
$$TF\left[\Pi\left(\frac{x}{a}\right)\right] = a \operatorname{sinc}(\pi u a)$$

Par réciprocité :  $TF^{-1}[e \operatorname{sinc}(\pi u e)] = \Pi\left(\frac{x}{e}\right)$

**b. Triangle de base 2a :**  $\Lambda\left(\frac{x}{a}\right)$

C'est le résultat de l'autocorrélation de distribution  $\Pi\left(\frac{x}{a}\right)$  :

$$\begin{aligned}\Pi\left(\frac{x}{a}\right) \otimes \Pi\left(\frac{x}{a}\right) &= a \Lambda\left(\frac{x}{a}\right) = a \left[1 - \frac{|x|}{a}\right] \quad |x| \leq a \\ &= 0 \text{ ailleurs}\end{aligned}$$



on a donc :  $TF [\text{triangle de base } 2a] = TF\left[\Lambda\left(\frac{x}{a}\right)\right] = a \operatorname{sinc}^2(\pi u a)$

### c. Distribution de Dirac : $\delta(x)$

Elle est utilisée pour symboliser la transmittance d'une fente infiniment fine (de largeur « nulle ») et centrée en  $x = 0$

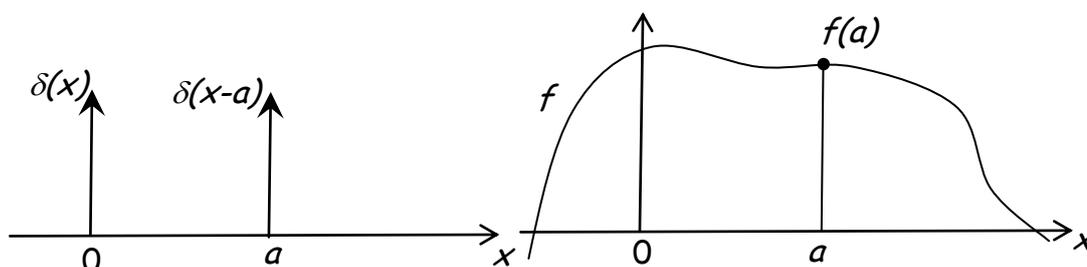
$$\delta(x) = 0 \quad \text{pour } x \neq 0$$

et elle satisfait la relation de définition :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) f(x) dx = f(0)$$

$$\text{soit : } \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) dx = 1 \quad \text{et} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x-a) f(x) dx = f(a)$$

$$\text{on a également : } \delta(ax) = \frac{1}{|a|} \delta(x)$$



En physique on écrit :  $f(x) \delta(x-a)$  ce qui signifie :

$$f(x) \delta(x-a) = f(a) \text{ pour } x = a \text{ et } f(x) \delta(x-a) = 0 \text{ pour } x \neq a$$

**Convolution par  $\delta(x)$  :**

$$\delta(x) * f(x) = f(x) * \delta(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x') \delta(x-x') dx' = f(x)$$

$\delta(x)$  représente donc l'élément neutre du produit de convolution

### Transformée de Fourier de $\delta(x)$ :

$$TF[\delta(x) * f(x)] = TF[f(x)]$$

par ailleurs :

$$TF[\delta(x) * f(x)] = TF[\delta(x)] \times TF[f(x)]$$

$$\text{donc } TF[\delta(x)] = 1$$

on peut en déduire que :

$$TF^{-1}[1] = \delta(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2i\pi ux} du$$

et :

$$TF[1] = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2i\pi ux} dx = \delta(u)$$

### Translation de $a$ :

$$\begin{aligned} f(x) * \delta(x-a) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x') \delta[(x-a) - x'] dx' \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x') \delta[x' - (x-a)] dx' = f(x-a) \end{aligned}$$

on retiendra donc :

$$\boxed{f(x) * \delta(x-a) = f(x-a)}$$

### Transformée de Fourier de $\delta(x-a)$ :

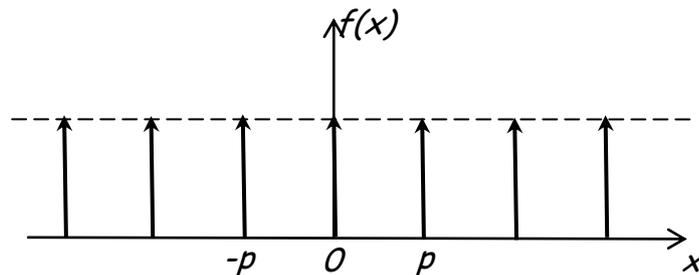
$$TF[\delta(x-a)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x-a) e^{-2i\pi ux} dx = e^{-2i\pi ua}$$

$$TF[\delta(x-a) + \delta(x+a)] = 2 \cos(2\pi ua)$$

$$TF[\delta(x-a) - \delta(x+a)] = -2i \sin(2\pi ua)$$

#### d. Peigne de Dirac :

C'est une suite infinie de distributions de Dirac régulièrement espacées :



Ce peigne symbolise un réseau de fentes infiniment fines (utile pour représenter tout réseau).

La fonction qui le représente s'écrit comme suit :

$$f\left(\frac{x}{p}\right) = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} \delta(x - kp) = pgn\left(\frac{x}{p}\right)$$

#### TF peigne de Dirac

$$TF\left[pgn\left(\frac{x}{p}\right)\right] = \frac{1}{p} \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} \delta\left(u - \frac{k}{p}\right)$$

#### Convolution

$$g(x) * \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} \delta(x - kp) = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} g(x - kp)$$

## Autocorrélation du peigne de Dirac

$$p\text{gn}\left(\frac{x}{p}\right) \otimes p\text{gn}\left(\frac{x}{p}\right) = p\text{gn}\left(\frac{x}{p}\right)$$

## Echantillonnage

$$g_s(x) = g(x) \cdot p\text{gn}\left(\frac{x}{p}\right) = g(x) \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} \delta(x - kp) = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} g(kp)$$

$$\hat{g}_s(u) = \hat{g}(u) * p\hat{g}n(pu) = \frac{1}{p} \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} \hat{g}\left(u - \frac{k}{p}\right)$$

Peigne de Dirac limité (longueur L) :

$$f(x) = \Pi\left(\frac{x}{L}\right) \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} \delta(x - kp)$$

- TF Peigne de Dirac limité (longueur L) :

$$\hat{f}(u) = \frac{L}{p} \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} \text{sinc} \pi\left(u - \frac{k}{p}\right) L$$

- Autocorrélation du peigne de Dirac limité (longueur L)

$$f(x) \otimes f(x) = L \cdot \Lambda\left(\frac{x}{L}\right) \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} \delta(x - kp) \Leftrightarrow \hat{f}(u) \hat{f}^*(u)$$

$$\hat{f}(u)\hat{f}^*(u) = |\hat{f}(u)|^2 = \left(\frac{L}{p}\right)^2 \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} \text{sinc}^2 \pi \left(u - \frac{k}{p}\right)L$$

**Réseau de portes limité :**

$$f(x) = \Pi\left(\frac{x}{a}\right) * \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} \delta(x - kp) \Pi\left(\frac{x}{L}\right)$$

$$\hat{f}(u) = \frac{aL}{p} \text{sinc} \pi ua \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} \text{sinc} \pi \left(u - \frac{k}{p}\right)L$$

## 6. Transformation de Fourier 2 D

Les définitions précédentes sont valables à 2 dimensions, quelques précautions doivent être prises pour leur utilisation.

### Définitions

$${}^2TF[g(x, y)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x, y) e^{-2i\pi(ux+vy)} dx dy = \hat{g}(u, v)$$

$${}^2TF^{-1}[\hat{g}(u, v)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{g}(u, v) e^{2i\pi(ux+vy)} du dv = g(x, y)$$

On écrira donc :  $g(x, y) \overset{2}{\leftrightarrow} \hat{g}(u, v)$

**Pic de Dirac :**

$$\delta(x, y) = \delta(r) = \iint_{\text{plan}} e^{2i\pi r w} dw$$

$${}^2TF[\delta(x, y)] = 1$$

### Propriétés de la TF 2D :

*Optique de Fourier et formation des images*

*Yann VAILLS – date de dernière mise à jour : 06/09/2019*

*Ce cours est disponible à l'adresse suivante : <http://www.cemhti.cnrs-orleans.fr/?nom=Vaills>*

**Fonctions à variables séparées :**  $h(x, y) = f(x) g(y)$

$${}^2TF[h(x, y)] = TF[f(x)] \cdot TF[g(y)] = \hat{f}(u) \hat{g}(v)$$

- **cas particulier :**  $h(x, y) = f(x)$  à valeur constante suivant  $y = 1_y$

$${}^2TF[h(x, y)] = {}^2TF[f(x)1_y] = \hat{f}(u) \delta(v)$$

- **Convolution :**

$$h_1(x, y) = f_1(x) g_1(y), \quad h_2(x, y) = f_2(x) g_2(y)$$

$$h_1(x, y) ** h_2(x, y) = [f_1(x) * f_2(x)][g_1(y) * g_2(y)]$$

$${}^2TF[h_1(x, y) ** h_2(x, y)] = [\hat{f}_1(u) \hat{f}_2(u)] \cdot [\hat{g}_1(v) \hat{g}_2(v)]$$

- **Translation :**

$$h(x, y) ** \delta(x-a, y-b) = [f(x) * \delta(x-a)][g(y) * \delta(y-b)]$$

**Fonctions à symétrie circulaire :**  $g(r, \theta) = g_R(r)$

- **Transformée de Fourier-Bessel :**

$$\hat{g}(\rho) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} r g_R(r) J_0(2\pi\rho r) dr, \quad J_0(z) = J_{n=0}(z) \text{ avec}$$

$$J_n(z) = \frac{i^{-n}}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{iz \cos \theta} e^{in\theta} d\theta$$

$$r = (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}, \quad \rho = (u^2 + v^2)^{\frac{1}{2}}$$

## Exemples de transformation de Fourier 2D :

$${}^2TF \left[ e^{-\frac{x^2+y^2}{a^2}} \right] = \pi a^2 e^{-\pi^2 a^2 (u^2+v^2)}$$

$$\text{Porte rectangulaire : } \Pi\left(\frac{x}{a}, \frac{y}{b}\right) = \Pi\left(\frac{x}{a}\right) \Pi\left(\frac{y}{b}\right)$$

$${}^2TF \left[ \Pi\left(\frac{x}{a}\right) \Pi\left(\frac{y}{b}\right) \right] = ab \operatorname{sinc}(\pi u a) \operatorname{sinc}(\pi v b)$$

$$\text{Porte circulaire de diamètre } D : \Pi\left(\frac{r}{D}\right)$$

$${}^2TF \left[ \Pi\left(\frac{r}{D}\right) \right] = \frac{\pi D^2}{4} \frac{2 J_1(\pi \rho D)}{\pi \rho D} ,$$

$J_1$  fonction de Bessel d'ordre 1.

$${}^2TF \left[ \Lambda\left(\frac{x}{a}\right) \Lambda\left(\frac{y}{b}\right) \right] = ab \operatorname{sinc}^2(\pi u a) \operatorname{sinc}^2(\pi v b)$$

$$\text{Ligne de pics de Dirac sur un plan : } \mathcal{W}\left(\frac{x}{p}\right) \delta(y)$$

$${}^2TF \left\{ \left(\frac{x}{p}\right) \delta(y) \right\} = \frac{1}{p} \operatorname{pgn}(\rho u) 1_y$$

$$\text{"Planche de fakir" : } \operatorname{png}\left(\frac{x}{p}, \frac{y}{q}\right) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(x - mp, y - nq)$$

$${}^2TF \left( \operatorname{png}\left(\frac{x}{p}, \frac{y}{q}\right) \right) = {}^2TF \left[ \operatorname{pgn}\left(\frac{x}{p}\right) \operatorname{pgn}\left(\frac{y}{q}\right) \right] = \frac{1}{pq} \operatorname{pgn}[\rho u] \operatorname{pgn}[\rho v]$$

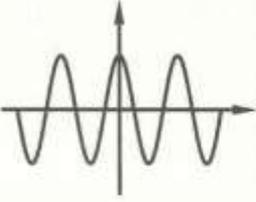
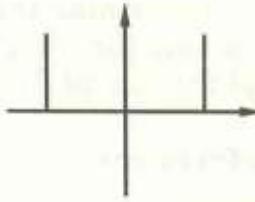
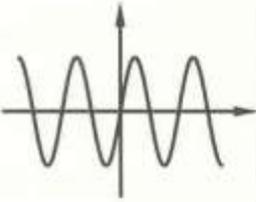
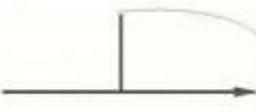
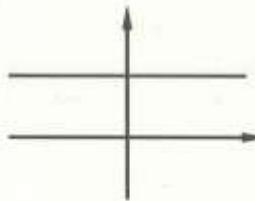
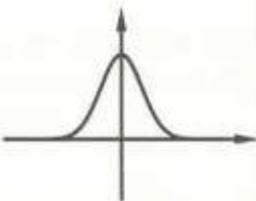
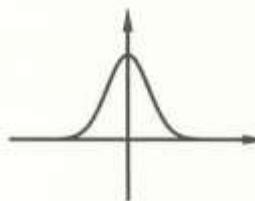
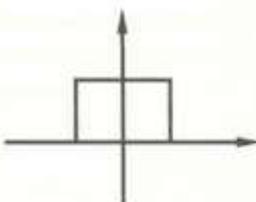
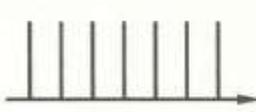
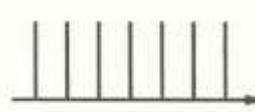
$$= \frac{1}{pq} \text{pgn}(pu, qv)$$

Réseau de traits sur un plan :  $\text{pgn}\left(\frac{x}{p}\right)1_y$

$$TF\left[\text{pgn}\left(\frac{x}{p}\right)1_y\right] = \frac{1}{p} \text{pgn}(pu)\delta(v)$$

Réseau sinusoïdal sur un plan :  $\cos(\pi ax)1_y$

$$\begin{aligned} {}^2TF[\cos(\pi ax)1_y] &= \frac{1}{2} \left[ \delta\left(u - \frac{a}{2}\right) + \delta\left(u + \frac{a}{2}\right) \right] \delta(v) \\ &= \frac{1}{2} \left[ \delta\left(u - \frac{a}{2}, v\right) + \delta\left(u + \frac{a}{2}, v\right) \right] \end{aligned}$$

| function $f(t)$  | Fourier transform $\mathcal{F}[f](v)$  |
|--|--|
| cosine function<br>$\cos(2\pi v_0 t)$   | line spectrum<br>(real)<br>$\frac{1}{2} \delta(v-v_0)$<br>$+ \frac{1}{2} \delta(v+v_0)$           |
| sine function<br>$\sin(2\pi v_0 t)$   | line spectrum<br>(imaginary)<br>$\frac{1}{2} i \delta(v-v_0)$<br>$- \frac{1}{2} i \delta(v+v_0)$  |
| delta function<br>$\delta(t)$    | constant function<br>1   |
| Gaussian<br>$\exp(-\pi t^2)$    | Gaussian<br>$\exp(-\pi v^2)$    |
| rect function<br>$\text{rect}(t)$<br>$= \begin{cases} 1, &  t  \leq \frac{1}{2} \\ 0 & \text{else.} \end{cases}$  | sinc function<br>$\text{sinc}(v)$<br>$= \frac{\sin(\pi v)}{\pi v}$                              |
| comb function<br>$\text{comb}(t)$<br>$= \sum_{-\infty}^{+\infty} \delta(n-t)$                                     | comb function<br>$\text{comb}(v)$<br>$= \sum_{-\infty}^{+\infty} \delta(n-v)$                   |

**Fig. A.2.** Some frequently occurring functions and their Fourier transforms.

## 7. Utilisation des distributions pour les calculs de diffraction

Règle de base : écrire systématiquement à 2 dimensions car toutes les pupilles sont assimilables à des trous de surface non nulle.

### a. Pupilles simples

- **Rectangulaire**

- centrée :  $t_1(x, y) = \Pi\left(\frac{x}{a}, \frac{y}{b}\right)$

$$A_1(u, v) = TF(t_1(x, y)) = ab \operatorname{sinc}(\pi u a) \operatorname{sinc}(\pi v b)$$

et :  $I_1(u, v) = |A_1(u, v)|^2$

- déplacée :  $t(x, y) = t_1(x, y) ** \delta(x - \alpha, y - \beta)$

$$= \left[ \Pi\left(\frac{x}{a}\right) * \delta(x - \alpha) \right] \cdot \left[ \Pi\left(\frac{y}{b}\right) * \delta(y - \beta) \right]$$

$$A(u, v) = TF(t(x, y)) = ab e^{-2i\pi u \alpha} \operatorname{sinc}(\pi u a) e^{-2i\pi v \beta} \operatorname{sinc}(\pi v b)$$

- **Opacité (apodisation) :  $t(x, y) = t_1(x, y) t_2(x, y)$**

et  $A(u, v) = A_1(u, v) A_2(u, v)$

l'apodisation est une technique de filtrage en éclairage incohérent qui consiste à modifier la fonction de transfert optique et donc la transmittance de la pupille (par exemple ici  $t_1(x, y)$  en apportant un modification revenant à la multiplier par  $t_2(x, y)$ ) afin de minimiser, voire supprimer, les maxima secondaires ou « pieds », de la réponse impulsionnelle, d'où son nom.

- **Ecrans complémentaires (Babinet)**

Soient les deux transmittances suivantes :

$$t_1(x, y) + t_2(x, y) = 1$$

$$A_2(u, v) = \mathcal{F}^2[1] - A_1(u, v) \quad \text{soit :}$$

$$A_2(u, v) = \delta(u, v) - A_1(u, v)$$

$$\text{d'où : } I_2(u, v) = |A_2(u, v)|^2 = k\delta(u, v) + I_1(u, v)$$

- **Trou circulaire** :  $t(r) = \Pi\left(\frac{r}{2R}\right)$

$$\text{D'où : } A(\rho) = \pi R^2 \frac{2J_1(2\pi\rho R)}{2\pi\rho R} \quad \text{où } \rho = \frac{r'}{\lambda f}$$

### b. Distribution de trous infiniment fins

- **1 trou** : pic de Dirac

$$t(x, y) = \delta(x, y) \Leftrightarrow A(u, v) = C^{ste} \quad I(u, v) = |C^{ste}|^2$$

- **Ligne de trous suivant l'axe des x** :

$$t(x, y) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(x - na) \delta(y) \Leftrightarrow A(u, v)$$

$$A(u, v) = \mathcal{F}^2[t(x, y)]$$

$$A(u, v) = \frac{1}{a} \text{pgn}(au) \cdot 1_v$$

$$I(u, v) = \frac{1}{a^2} \text{pgn}(au) \cdot 1_v \quad : \text{réseau de traits // } y'$$

- **réseau de trous infiniment fins :**

$$t(x, y) = \sum_m \sum_n \delta(x - na, y - mb) = \text{pgn}\left(\frac{x}{a}\right) \text{pgn}\left(\frac{y}{b}\right)$$

$$\text{d'où : } A(u, v) = {}^2 \text{TF}[t(x, y)]$$

$$A(u, v) = \frac{1}{ab} \text{pgn}(au) \text{pgn}(bv)$$

et

$$I(u, v) = \left(\frac{1}{ab}\right)^2 \text{pgn}(au) \text{pgn}(bv)$$

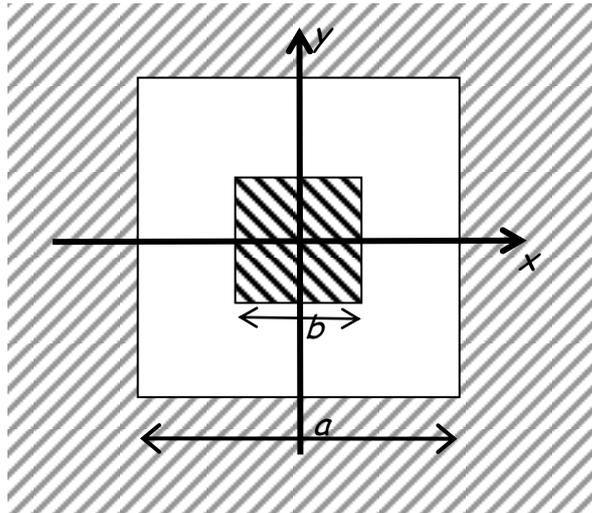
L'intensité observée est un réseau à 2 dimensions de périodicités :

$1/a$  selon  $u$

$1/b$  selon  $v$

### c. Pupilles composées

- **Principe de la représentation de la transmittance**  
Considérons la pupille suivante :



**transmittance d'un carré opaque de côté  $b$**  : soit  $t_1$  cette transmittance et  $t'_1$  la transmittance d'un trou carré de côté  $b$

$$\text{On a : } t_1 + t'_1 = 1 \quad \text{d'où } t_1 = 1 - \Pi\left(\frac{x}{b}, \frac{y}{b}\right)$$

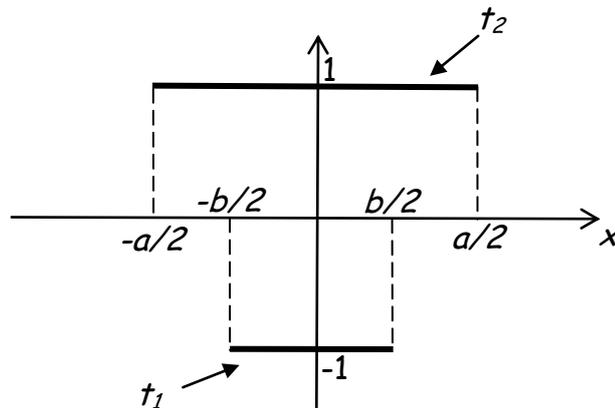
La pupille représentée ci-dessus aura donc la transmittance suivante :

$$t(x, y) = \Pi\left(\frac{x}{a}, \frac{y}{a}\right) \cdot t_1 = t_2 \cdot t_1 = \Pi\left(\frac{x}{a}, \frac{y}{a}\right) \left[ 1 - \Pi\left(\frac{x}{b}, \frac{y}{b}\right) \right]$$

soit :

$$t(x, y) = \Pi\left(\frac{x}{a}, \frac{y}{a}\right) - \Pi\left(\frac{x}{b}, \frac{y}{b}\right) = \Pi\left(\frac{x}{a}, \frac{y}{a}\right) + e^{i\pi} \Pi\left(\frac{x}{b}, \frac{y}{b}\right)$$

On aurait pu écrire directement cette transmittance en raisonnant sur la représentation graphique des deux transmittances  $t_1$  et  $t_2$



L'amplitude et l'intensité diffractées à l'infini sont donc :

$$A(u,v) = \text{TF}[t(x,y)]$$

$$A(u,v) = a^2 \text{sinc}(\pi ua) \text{sinc}(\pi va) - b^2 \text{sinc}(\pi ub) \text{sinc}(\pi vb)$$

$$\text{et } I(u,v) = |A(u,v)|^2$$

- Deux fentes «  $a, b$  » distantes de  $d$

$$t(x,y) = \Pi\left(\frac{x}{a}, \frac{y}{b}\right) * \left[ \delta\left(x - \frac{d}{2}\right) + \delta\left(x + \frac{d}{2}\right) \right]$$

soit :

$$t(x,y) = \Pi\left(\frac{x}{a}\right) * \delta\left(x - \frac{d}{2}\right) \Pi\left(\frac{y}{b}\right) + \Pi\left(\frac{x}{a}\right) * \delta\left(x + \frac{d}{2}\right) \Pi\left(\frac{y}{b}\right)$$

On en déduit l'amplitude diffractée à l'infini :

$$A(u,v) = \text{TF}[t(x,y)]$$

$$A(u, v) = ab \operatorname{sinc}(\pi u a) e^{-i\pi u d} \operatorname{sinc}(\pi v b) + ab \operatorname{sinc}(\pi u a) e^{i\pi u d} \operatorname{sinc}(\pi v b)$$

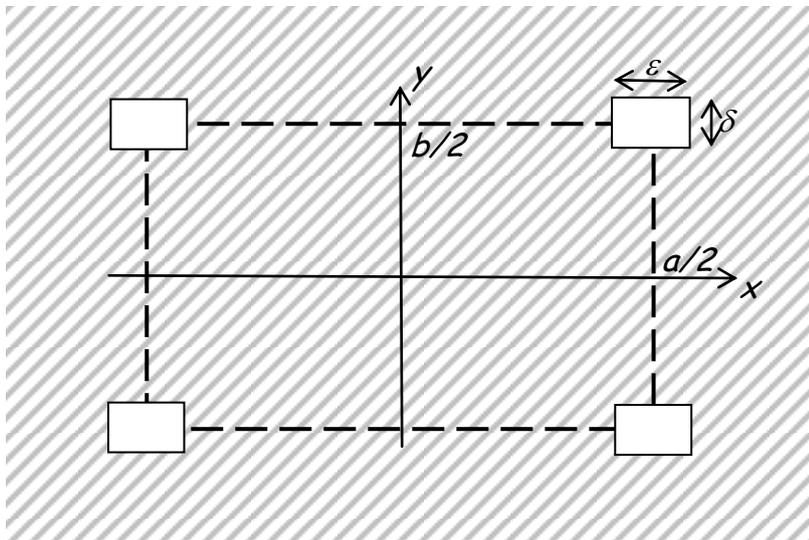
soit :

$$A(u, v) = 2ab \operatorname{sinc}(\pi u a) \operatorname{sinc}(\pi v b) \cos(\pi u d)$$

et

$$I(u, v) = 4a^2 b^2 \operatorname{sinc}^2(\pi u a) \operatorname{sinc}^2(\pi v b) \cos^2(\pi u d)$$

- **Diffraction par des trous rectangulaires aux sommets d'un rectangle**



$$t(x, y) = \Pi\left(\frac{x}{\varepsilon}, \frac{y}{\delta}\right) ** \left[ \delta\left(x - \frac{a}{2}, y - \frac{b}{2}\right) + \delta\left(x + \frac{a}{2}, y - \frac{b}{2}\right) + \delta\left(x - \frac{a}{2}, y + \frac{b}{2}\right) + \delta\left(x + \frac{a}{2}, y + \frac{b}{2}\right) \right]$$

On en déduit l'amplitude diffractée à l'infini :

$$A(u, v) = \mathcal{F}[t(x, y)]$$

$$A(u, v) = \mathcal{F}[t(x, y)]$$

$$A(u, v) = \begin{cases} \varepsilon \delta \operatorname{sinc}(\pi u \varepsilon) \operatorname{sinc}(\pi v \delta) e^{-i\pi(u a + v b)} \\ + \varepsilon \delta \operatorname{sinc}(\pi u \varepsilon) \operatorname{sinc}(\pi v \delta) e^{-i\pi(u a - v b)} \\ + \varepsilon \delta \operatorname{sinc}(\pi u \varepsilon) \operatorname{sinc}(\pi v \delta) e^{i\pi(u a - v b)} \\ + \varepsilon \delta \operatorname{sinc}(\pi u \varepsilon) \operatorname{sinc}(\pi v \delta) e^{i\pi(u a + v b)} \end{cases}$$

$$A(u, v) = 2\varepsilon\delta \operatorname{sinc}(\pi u\varepsilon) \operatorname{sinc}(\pi v\delta) \{ \cos[\pi(ua + vb)] + \cos[\pi(ua - vb)] \}$$

$$I(u, v) = |A(u, v)|^2$$

- **Diffraction par un réseau limité de fentes**

On considère un réseau de largeur  $L$ , de fentes de largeur  $\varepsilon$  et hauteur  $h$ , espacées de  $b$ .

Sa transmittance s'exprime de la façon suivante :

$$t(x, y) = \left[ \Pi\left(\frac{x}{\varepsilon}, \frac{y}{h}\right) * \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(x - kb) \right] \Pi\left(\frac{x}{L}\right) 1_y$$

L'amplitude diffractée à l'infini, dans le cas où  $\varepsilon \ll h$ , se met sous la forme :

$$A(u, v) = \underbrace{\frac{\varepsilon L}{b} \operatorname{sinc}(\pi u\varepsilon) \delta(v)}_{\text{Diffraction}} \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \operatorname{sinc}\left[\pi\left(u - \frac{k}{b}\right)L\right]}_{\text{Interférences}}$$

- **Diffraction par  $N$  objets identiques répartis au hasard**

L'amplitude diffractée par le  $n^{\text{ième}}$  de ces objets se met sous la forme :

$$U_n(u, v) = A_0(u, v) e^{i\varphi_n}$$

L'amplitude totale est :

$$U(u, v) = \sum_{n=1}^N U_n(u, v) = A_0(u, v) \sum_{n=1}^N e^{i\varphi_n}$$

L'intensité correspondante est :

$$I(u, v) = U(u, v) U^*(u, v) = |A_0(u, v)|^2 \sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N e^{i(\varphi_n - \varphi_m)}$$

soit :

$$I(u, v) = |A_0(u, v)|^2 \left[ N + \sum_{n \neq m} e^{i(\varphi_n - \varphi_m)} \right]$$

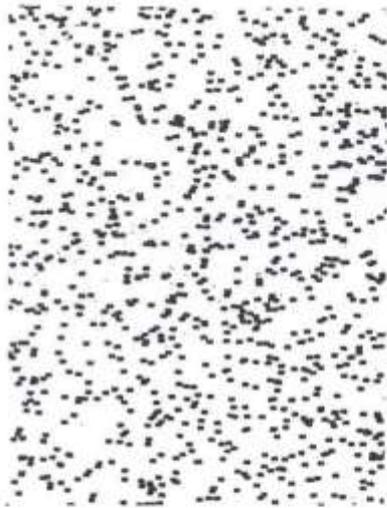
$$\text{or : } \sum_{n \neq m} e^{i(\varphi_n - \varphi_m)} = \sum_{n \neq m} \cos(\varphi_n - \varphi_m) + i \sum_{n \neq m} \sin(\varphi_n - \varphi_m)$$

si le nombre  $N$  d'objets est grand alors

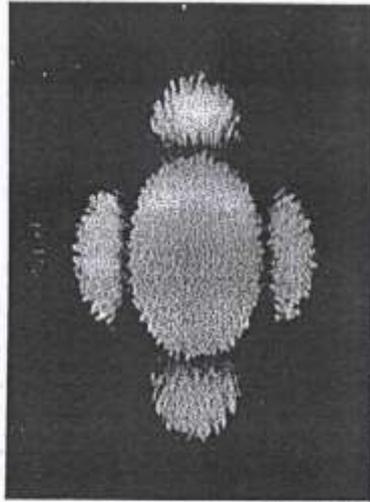
$$\sum_{n \neq m} \cos(\varphi_n - \varphi_m) \cong \sum_{n \neq m} \sin(\varphi_n - \varphi_m) \cong 0$$

$$\text{et } I(u, v) = N |A_0(u, v)|^2 = N I_0(u, v)$$

Ce résultat trouve son application en granulométrie par exemple.  $I(u, v)$  est indépendant du déplacement de chaque entité diffractante.



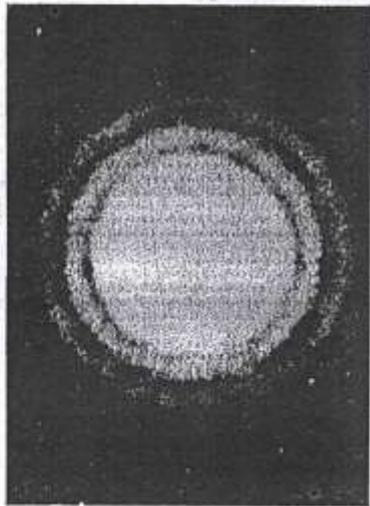
(a)



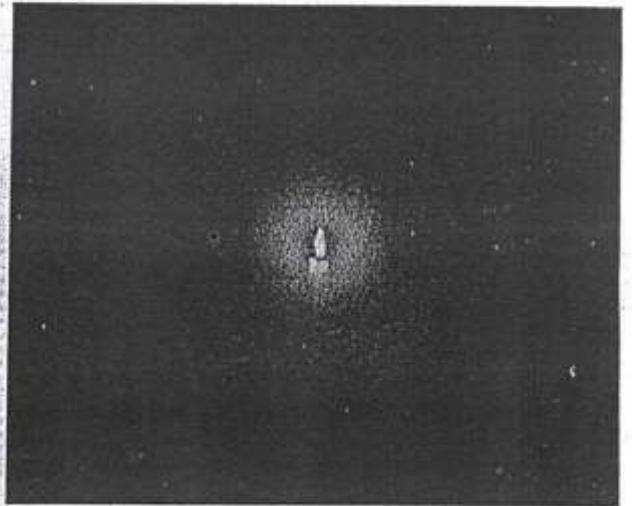
(b)



(c)



(d)

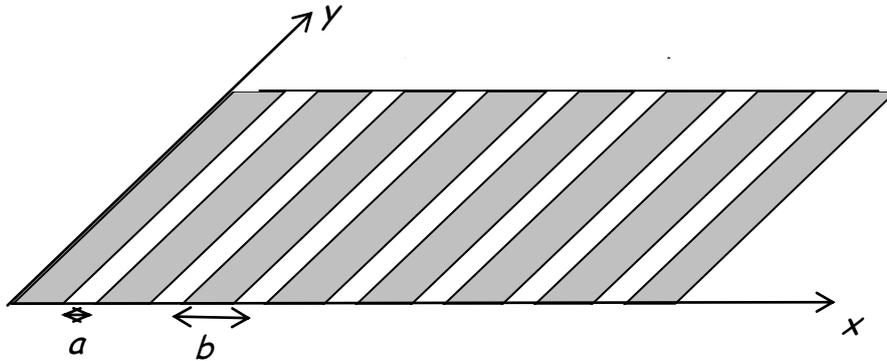


(e)

**Figure 10.41** (a) A random array of rectangular apertures. (b) The resulting white-light Fraunhofer pattern. (c) A random array of circular apertures. (d) The resulting white-light Fraunhofer pattern. (Photos courtesy The Ealing Corporation and Richard B. Hoover.) (e) A candle flame viewed through a fogged piece of glass. The spectral colors are visible as concentric rings. (Photo by E. H.)

### III. Applications à la spectroscopie

#### 1. Fonction diffraction : réseau limité de fentes



- L'amplitude est donnée par :

$$A(u, v) = \frac{aL}{b} \operatorname{sinc}(\pi ua) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \operatorname{sinc} \left[ \pi \left( u - \frac{k}{b} \right) L \right] \delta(v)$$

Les ordres d'interférence du réseau sont donnés par :  $u = \frac{k}{b}$

- La figure de diffraction est donnée par :

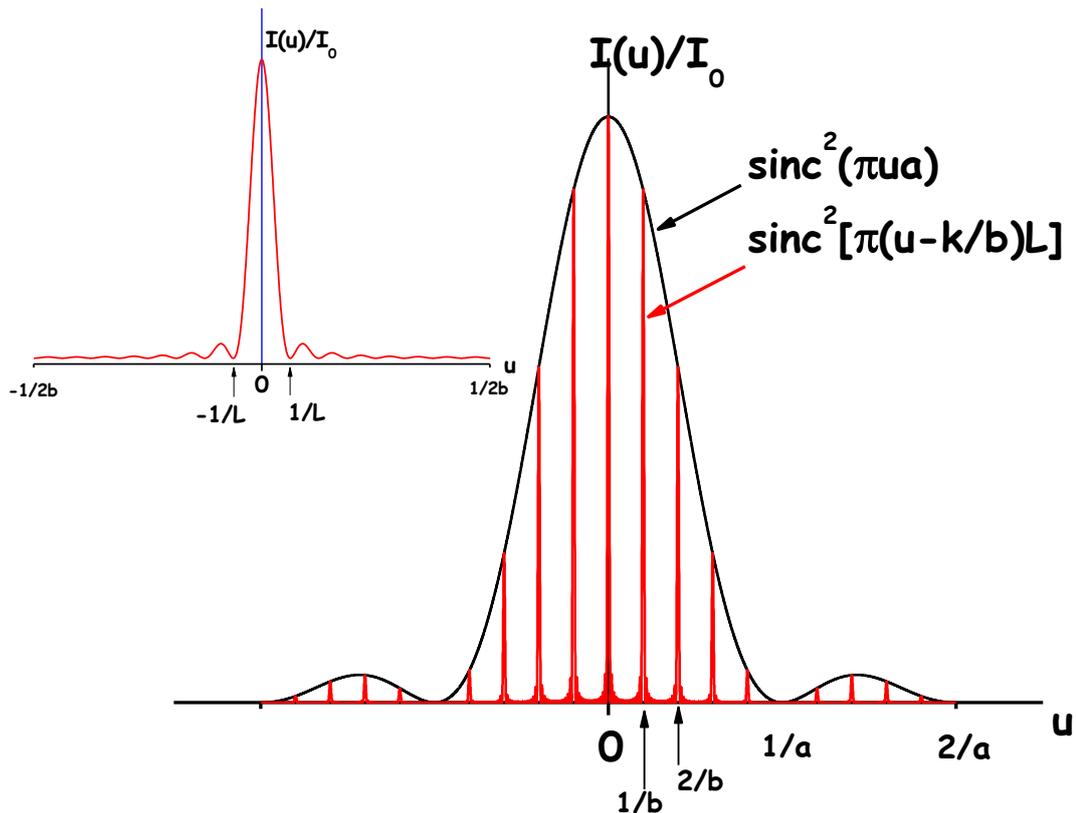
$$I(u, v) = \left( \frac{aL}{b} \right)^2 \operatorname{sinc}^2(\pi ua) \left\{ \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \operatorname{sinc} \left[ \pi \left( u - \frac{k}{b} \right) L \right] \right\}^2 \delta(v)$$

Pour  $L \gg b$  il n'y a pas de recouvrement des  $\operatorname{sinc} \left[ \pi \left( u - \frac{k}{b} \right) L \right]$  et les produits croisés sont nuls. L'intensité peut donc s'approximer par :

$$I(u, v) = \left( \frac{aL}{b} \right)^2 \operatorname{sinc}^2(\pi ua) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \operatorname{sinc}^2 \left[ \pi \left( u - \frac{k}{b} \right) L \right] \delta(v)$$

Ordres d'interférences : ils sont donnés par :  $u = \frac{k}{b}$

L'intensité s'annule pour  $\pi \left( u - \frac{k}{b} \right) L = k' \pi$  soit pour  $u = \frac{k}{b} \pm \frac{k'}{L}$   
avec  $k$  et  $k' \neq 0$ .



Les pics sont d'autant plus étroits que  $L$  est grand devant  $b$ .

- La dispersion de la lumière par un réseau :

Rôle de la longueur d'onde :  $u = \frac{\theta_{x'}}{\lambda} = \frac{x'}{\lambda f}$

Les maxima de déviation sont donnés par  $\theta_{x'} = \frac{k\lambda}{b}$  où l'on voit qu'ils dépendent de  $\lambda$

*Optique de Fourier et formation des images*

Yann VAILLS – date de dernière mise à jour : 06/09/2019

Ce cours est disponible à l'adresse suivante : <http://www.cemhti.cnrs-orleans.fr/?nom=Vaills>

- Pouvoir dispersif du réseau :

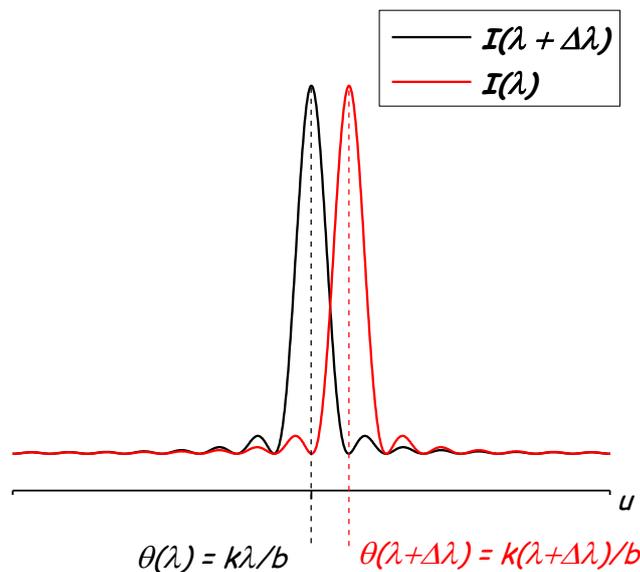
Il est donné par le quotient  $\frac{\Delta\theta_{x'}}{\Delta\lambda}$  c'est-à-dire d'après la relation ci-dessus :

$$\boxed{\frac{\Delta\theta_{x'}}{\Delta\lambda} = \frac{k}{b}}$$

Pour un réseau donné le pouvoir dispersif est donc d'autant plus grand que ce réseau est utilisé dans un ordre plus élevé.

- Pouvoir de résolution du réseau :

Une radiation composée de 2 longueurs d'ondes voisines  $\lambda$  et  $\lambda + \Delta\lambda$  sera séparée en 2 composantes dans l'ordre d'interférence  $k$  si le maximum d'intensité pour  $\lambda + \Delta\lambda$  vient se positionner sur le premier minimum de  $\lambda$  (dans cet ordre  $k$ ). Ceci définit le *critère de Rayleigh*



Dire que dans le même ordre d'interférence le maximum en  $\lambda + \Delta\lambda$  est positionné au même endroit de l'interferogramme que la première annulation en  $\lambda$  c'est écrire que l'angle  $\theta$  correspondant satisfait simultanément les deux relations suivantes :

$$u(\lambda + \Delta\lambda) = \frac{k}{b} = \frac{\theta}{\lambda + \Delta\lambda} \quad \text{et} \quad \pi \left( u(\lambda) - \frac{k}{b} \right) L = \pi \left( \frac{\theta}{\lambda} - \frac{k}{b} \right) L = \pi$$

*Optique de Fourier et formation des images*

Yann VAILLS – date de dernière mise à jour : 06/09/2019

Ce cours est disponible à l'adresse suivante : <http://www.cemhti.cnrs-orleans.fr/?nom=Vaills>

soit :  $\frac{k}{b}(\lambda + \Delta\lambda) = \theta$  et  $\frac{k}{b}\lambda = \theta - \frac{\lambda}{L}$

donc :  $\frac{k}{b} \frac{(\lambda + \Delta\lambda)}{\lambda} - \frac{k}{b} = \frac{1}{L}$

D'où :  $\frac{k}{b} \frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{1}{L}$

Et :  $R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = k \frac{L}{b} = Nk$

$R$  est appelé « pouvoir de résolution intrinsèque du réseau ».

Exemple de réseau : pour spectromètre Raman : réseau blazé travaillant à l'ordre 1 et avec 1 800 traits par mm, pour un spot lumineux de 6 cm sur le réseau. La résolution est donc :

$$R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = k \frac{L}{b} = \frac{60}{1/1800} = 108\,000$$

## 2. Utilisation du réseau en spectroscopie

Le réseau présenté précédemment, dont les facettes ou les fentes sont dans le même plan que le réseau proprement dit, a son maximum d'intensité en  $u = 0$ , où l'ordre d'interférence est  $k = 0$

Pour cette valeur de  $k$  le pouvoir de dispersion est nul :  $\frac{\Delta\theta}{\Delta\lambda} = 0$

Donc  $\forall \lambda$  il y a un maximum d'intensité en  $u = 0$  et le réseau ne peut pas être utilisé pour analyser un spectre complexe à l'endroit du spectrogramme où l'intensité est la plus forte ( $u = 0$ ).

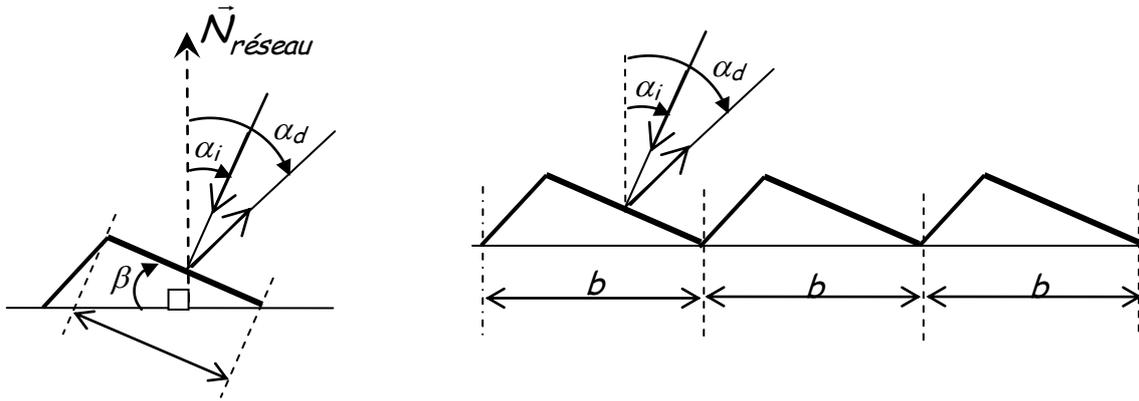
Pour surmonter cet inconvénient on peut modifier le réseau c'est ce que l'on a fait avec les réseaux échellette ou réseaux « blazés ».

De tels réseaux sont utilisés en réflexion, ce qui permet notamment de s'affranchir des défauts pouvant être rencontrés par la lumière si elle traverse le support de réseau.

Comme pour toute pupille réelle donnant lieu à des interférences, l'intensité diffractée par un réseau dans les conditions de Fraunhofer se met simplement

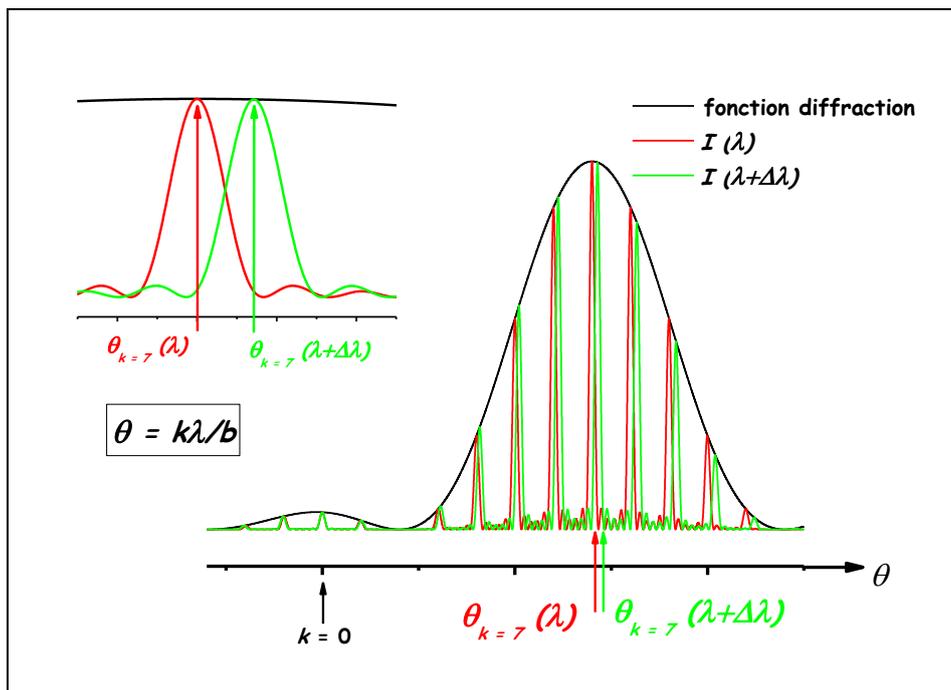
sous la forme du produit d'une fonction « diffraction » et d'une fonction « interférences » :

$$I = I_{diff} I_{int}$$



Il sera donc possible de faire coïncider le maximum d'interférences d'ordre  $k$  du réseau avec le maximum de diffraction des facettes pour  $k \neq 0$  si on tourne les facette d'un angle  $\beta$

On a alors  $\theta_i = \alpha_i - \beta$



Sur cette figure on voit clairement que pour séparer les raies (selon le critère de Rayleigh) correspondant aux longueurs d'onde  $\lambda$  et  $\lambda + \Delta\lambda$  il faut faire coïncider l'ordre 7 d'interférence et le maximum de diffraction des facettes.

*Optique de Fourier et formation des images*

*Yann VAILLS – date de dernière mise à jour : 06/09/2019*

*Ce cours est disponible à l'adresse suivante : <http://www.cemhti.cnrs-orleans.fr/?nom=Vails>*

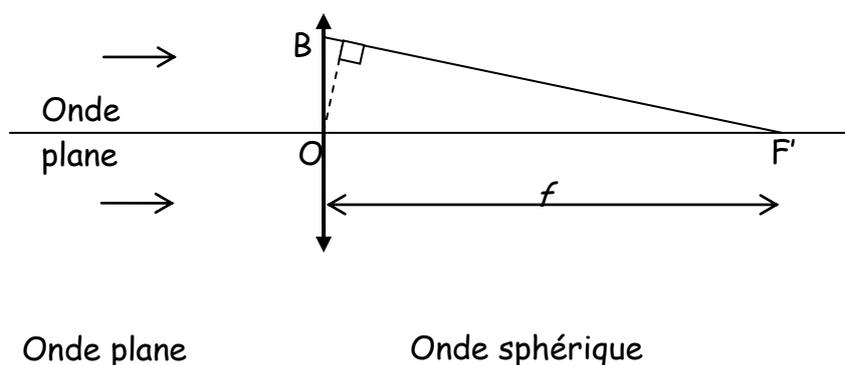
# Chapitre 3

## FORMATION DES IMAGES

La formation et le traitement des images représentent aujourd'hui une technique qui se généralise dans de très nombreux domaines et ceci d'ailleurs bien au-delà de l'optique puisque cette démarche est utilisée pour les ultrasons ou la résonance magnétique par exemple pour imagerie médicale. Images de la terre, du corps humain, de molécules, applications à la surveillance et la connaissance du territoire, la biologie, la médecine, la pharmacologie, tels sont les domaines où l'optique renouvelée permet de nouveaux développements très prometteurs.

### I. Lentilles et optique ondulatoire

#### 1. Modification de la phase introduite par une lentille



On travaille avec une lentille mince dans *l'approximation de l'optique paraxiale* (conditions de Gauss). Il est clair que  $BF' > OF'$

Or en  $F'$  les rayons lumineux sont en phase.

Le rayon sortant en B est donc en avance par rapport à celui sortant par O

Avec  $OB^2 = r^2 = x_0^2 + y_0^2$  on a :

$$\Delta\varphi_{B/O} = -\frac{2\pi}{\lambda} \left[ (f^2 + r^2)^{\frac{1}{2}} - f \right] \cong -\frac{2\pi}{\lambda} \frac{x_0^2 + y_0^2}{2f}$$

Si en O l'amplitude est notée  $A$ , alors l'onde en B a pour amplitude :

*Optique de Fourier et formation des images*

Yann VAILLS – date de dernière mise à jour : 06/09/2019

Ce cours est disponible à l'adresse suivante : <http://www.cemhti.cnrs-orleans.fr/?nom=Vaills>

$$Ae^{-i\pi \frac{x_0^2 + y_0^2}{\lambda f}}$$

La transmittance d'une lentille mince dans le plan  $(x,y)$  se met donc sous la forme :

$$t(x,y) = Ae^{-i\pi \frac{x^2 + y^2}{\lambda f}}$$

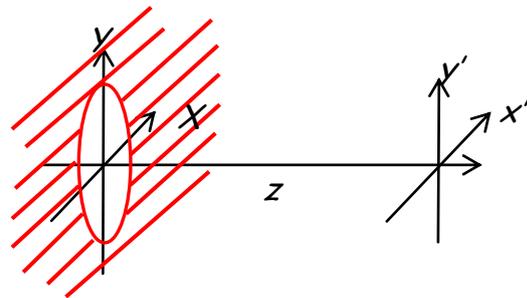
## 2. Lentille et diffraction de la lumière

### a. Diffraction à la distance $z$ (Fresnel)

$$U_z(x',y') = A t ** D$$

- $A$  est l'amplitude de l'onde plane éclairant l'écran diffractant en  $XOY$
- $t(X,Y)$  est la transmittance dans ce plan

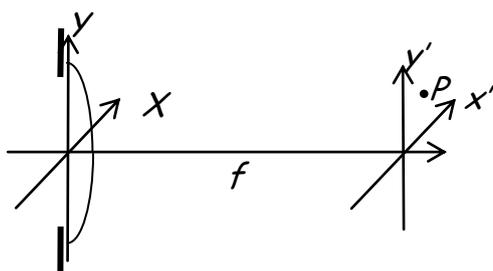
- $D(x,y) = \frac{e^{ikz}}{i\lambda z} e^{ik \frac{x^2 + y^2}{2z}}$



Pour un écran d'observation placé à une distance  $f$  de la pupille diffractante on a (résultat démontré dans le chapitre « Diffraction » de ce cours) :

$$U_f(x',y') = \frac{A e^{ikf}}{i\lambda f} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} t(X,Y) e^{ik \frac{(x'-X)^2 + (y'-Y)^2}{2f}} dXdY$$

### b. Diaphragme sur la lentille



L'écran d'observation dans le plan  $O'x'y'$  est éclairé par une pupille dont la transmittance est le produit de la transmittance du diaphragme par celle de la lentille, soit :

$$t'(X, Y) = t(X, Y) e^{-ik \frac{X^2 + Y^2}{2f}}$$

lorsque l'écran d'observation est dans le plan focal image de la lentille on a :

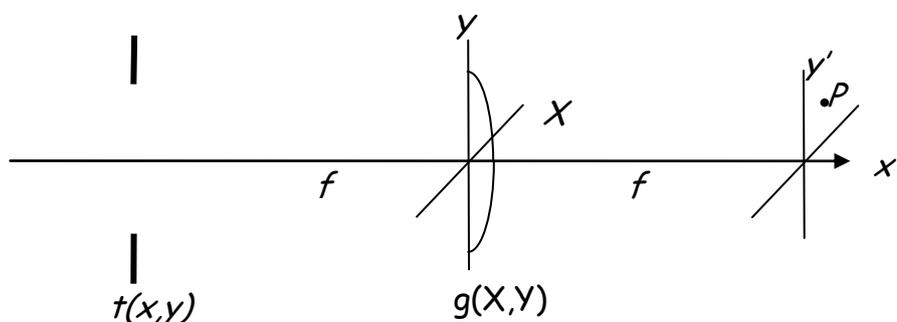
$$U_f(x', y') = \frac{A e^{ikf}}{i\lambda f} \int \int_{-\infty}^{+\infty} t'(X, Y) e^{ik \frac{(x'-X)^2 + (y'-Y)^2}{2f}} dXdY$$

$$U_f(x', y') = \frac{A e^{ikf}}{i\lambda f} e^{ik \frac{x'^2 + y'^2}{2f}} TF[t(X, Y)]$$

On retrouve l'expression de Fraunhofer

Un choix judicieux de la position du diaphragme permet de faire disparaître le terme de phase dépendant de la position du point P de l'écran d'observation.

### c. Diaphragme dans le plan focal objet de la lentille



*Optique de Fourier et formation des images*

Yann VAILLS – date de dernière mise à jour : 06/09/2019

Ce cours est disponible à l'adresse suivante : <http://www.cemhti.cnrs-orleans.fr/?nom=Vaills>

Si on place le diaphragme dans le plan focal objet de la lentille (convergente), alors dans l'expression de  $U_f(x',y')$   $t$  doit être remplacé est remplacé par  $g(X,Y) = t ** D$  (Fresnel)

$$D(X,Y) = \frac{e^{ikf}}{i\lambda f} e^{ik\frac{X^2+Y^2}{2f}} \text{ et } TF[D] = e^{ikf} e^{-ik\frac{x'^2+y'^2}{2f}}$$

$$U_f(x',y') = \frac{Ae^{2ikf}}{i\lambda f} TF[t(x,y)]$$

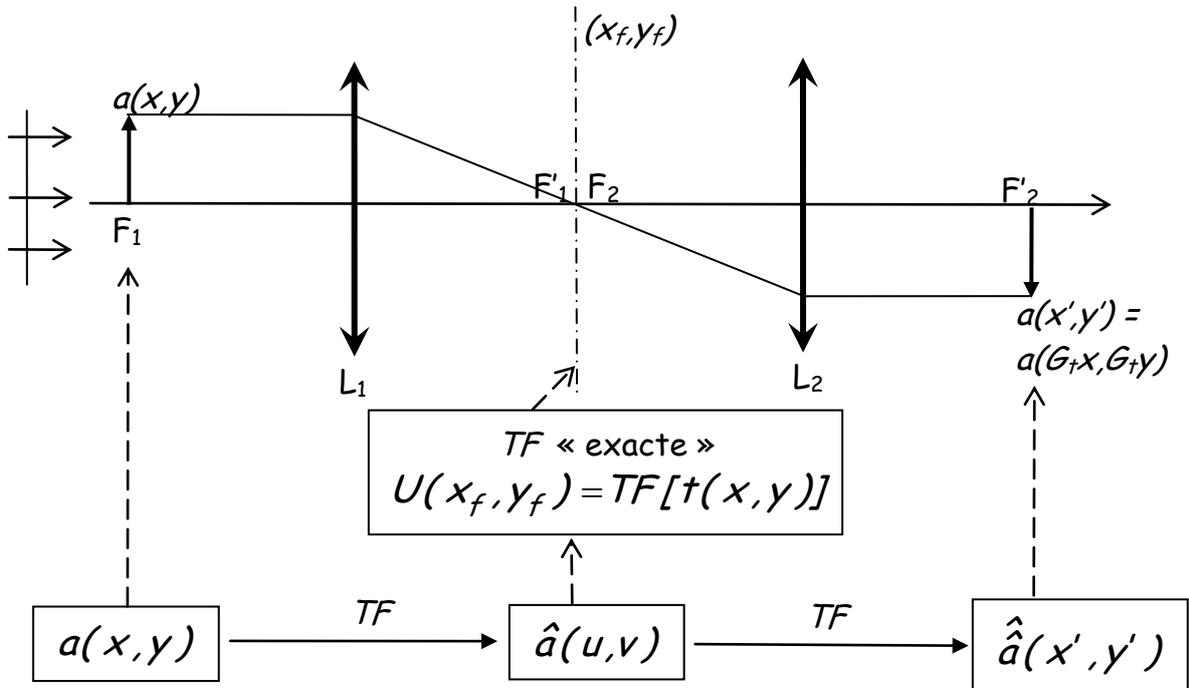
dans le plan focal image de la lentille apparaît la transformée de Fourier « exacte » de la transmittance pupillaire placée dans le plan focal objet de cette même lentille.

$$I_f(x',y') = \frac{I_0}{\lambda^2 f^2} |TF(t)|^2 = K|TF(t)|^2$$

NB : le calcul suppose une extension infinie du plan de la lentille.

### 3. Montages optiques

Montage à deux lentilles :



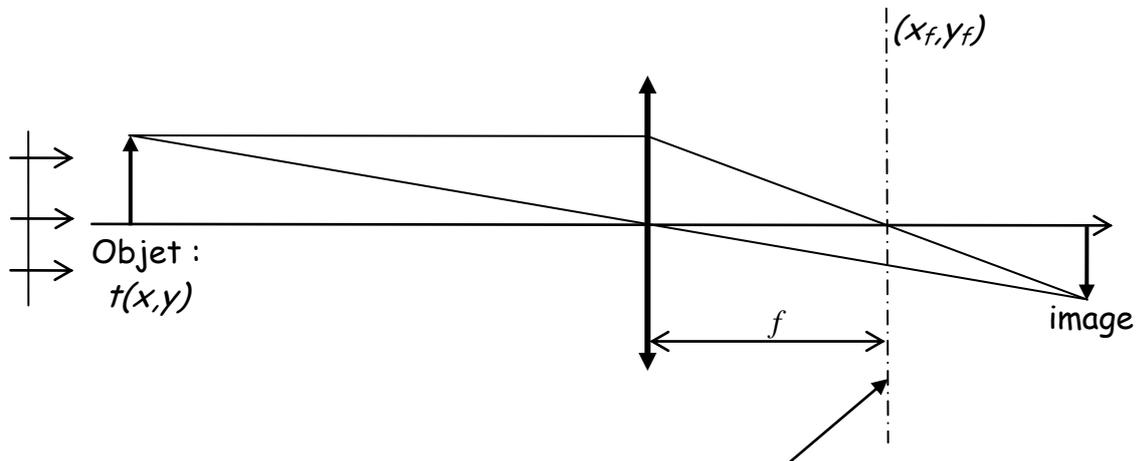
$$\hat{a}(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} a(x) e^{-2i\pi ux} dx \quad \text{et} \quad \hat{a}(x') = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{a}(u) e^{-2i\pi x' u} du$$

$$\hat{a}(x') = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} a(x) e^{-2i\pi u(x'+x)} dx du = \int_{-\infty}^{+\infty} a(x) \delta(x+x') dx = a(-x')$$

Finalemment :

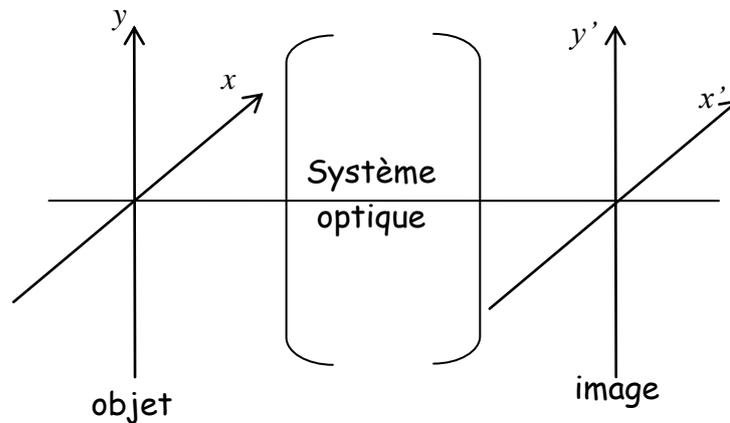
$$\hat{a}(x') = a(-x')$$

Montage à une lentille :

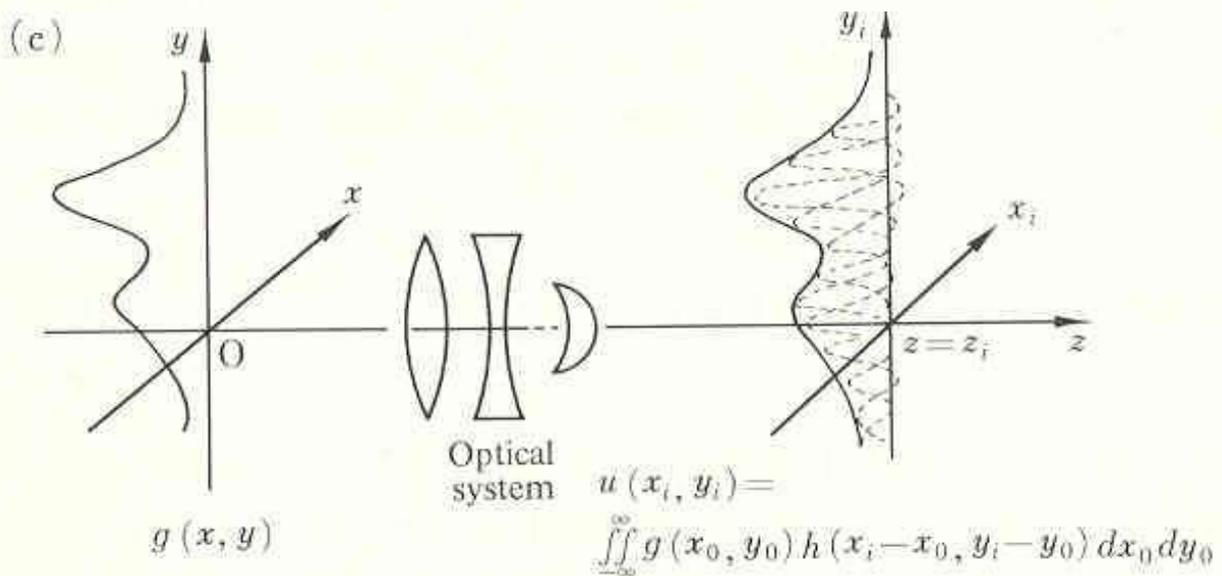
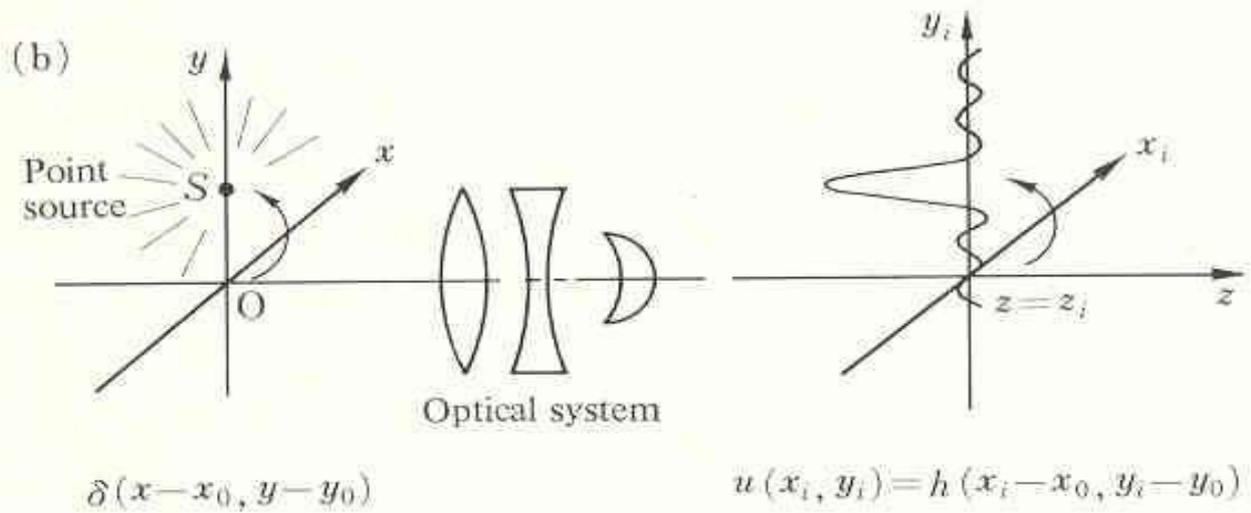
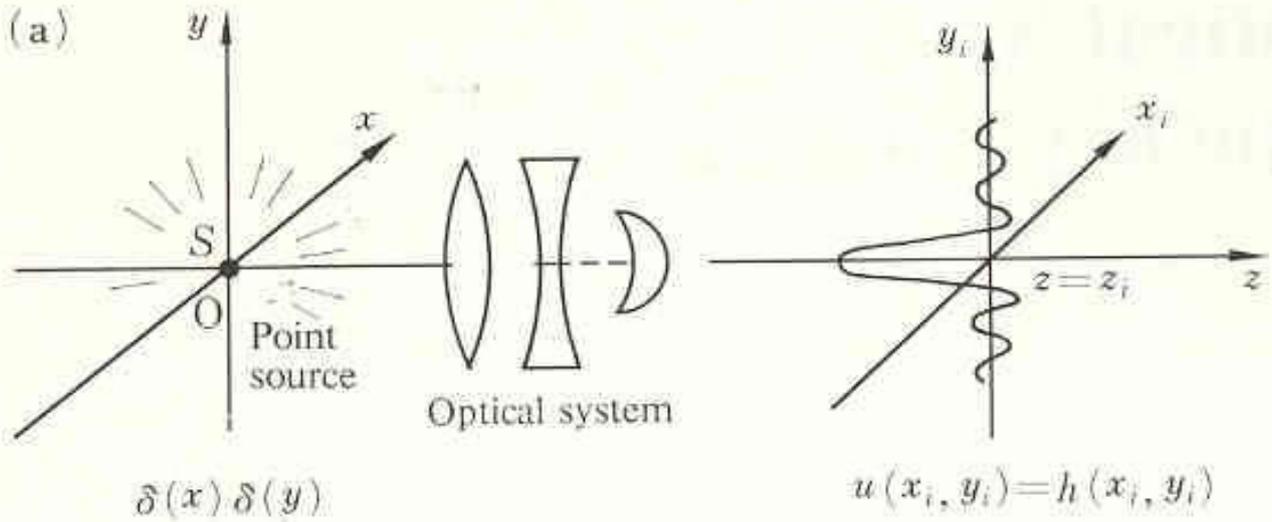


TF à une phase près  
$$U(x_f, y_f) = \tilde{\alpha}(x_f, y_f) TF[t(x, y)]$$

## II. Formation des images par un système optique



|                                     | <b>objet</b>                                 | → | <b>image</b>   |
|-------------------------------------|--|---|--|
| <b><u>optique géométrique</u></b> : | <i>1 point</i>                               | → | <i>1 point</i>   |
| <b><u>optique physique</u></b> :    | <i>1 point</i>                               | → | <i>tache de diffraction</i><br>la lumière se répartit sur l'écran :<br>voir figure ci-dessous (a) et (b)   |
|                                     | <i>objet étendu</i><br>(assemblée de points) | → | la lumière se répartit<br>sur l'écran : l'état d'un point<br>sur l'écran résulte de tout ce<br>qui se passe sur cet écran. Il<br>va falloir regarder de près le<br>rôle joué par <u>la nature de</u><br><u>l'éclairage</u> de l'objet,<br><i>cohérent</i> ou <i>incohérent</i> : voir<br>figure ci-dessous (c) |



*Optique de Fourier et formation des images*

Yann VAILLS – date de dernière mise à jour : 06/09/2019

Ce cours est disponible à l'adresse suivante : <http://www.cemhti.cnrs-orleans.fr/?nom=Vaills>

## 1. Rôle de la nature de l'éclairage

### a. Eclairage cohérent : principe

Ce sont les amplitudes  $A_n$  dues aux différents points sources qui s'additionnent dans l'image.

$$A_i = \sum A_n \text{ d'où } I_i = \left| \sum A_n \right|^2$$

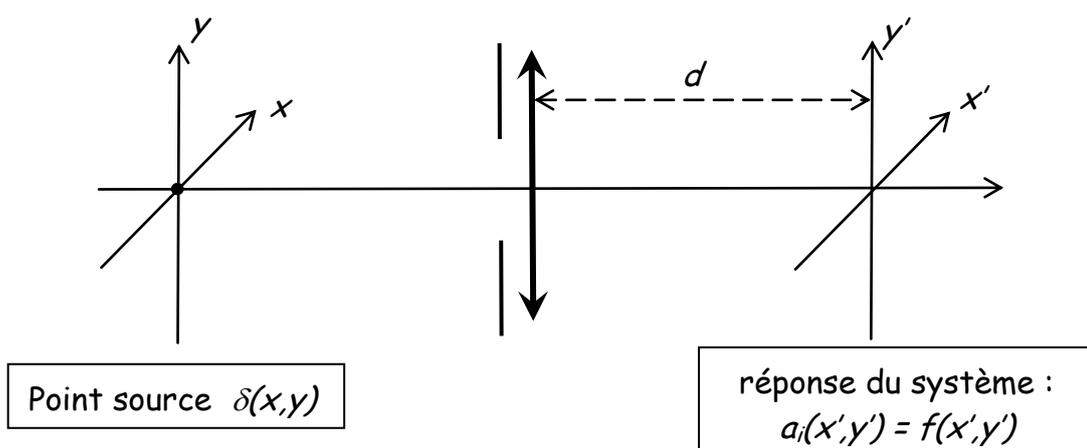
où  $A_i$  et  $I_i$  représentent respectivement l'amplitude et l'intensité dans l'image  $A_{image}$  et  $I_{image}$

### b. Eclairage incohérent : principe

L'objet peut être considéré comme un ensemble de points sources de vibrations incohérentes. L'intensité de l'image résulte directement des intensités produites par les différents points sources.

$$I_i = \sum I_n = \sum |A_n|^2$$

### c. Eclairage en lumière cohérente



A un point source  $\delta(x, y)$  la réponse du système dans le plan image est :

$$a_i(x', y') = f(x', y')$$

*Optique de Fourier et formation des images*

Yann VAILLS – date de dernière mise à jour : 06/09/2019

Ce cours est disponible à l'adresse suivante : <http://www.cemhti.cnrs-orleans.fr/?nom=Vaills>

$f(x',y')$  est la réponse impulsionnelle cohérente.

A un point source  $M(x_1,y_1)$  correspond une « tache » ou répartition en amplitude dans le plan image :

$$\delta(x-x_1,y-y_1) \Rightarrow a_i(x',y') = f(x'-x_1,y'-y_1)$$

Un objet caractérisé par une répartition en amplitude  $a(x,y)$  donnera dans le plan image une amplitude :

$$a_i(x',y') = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} a_g(x_1,y_1) f(x'-x_1,y'-y_1) dx_1 dy_1$$

où  $a_g(x_1,y_1)$  représente l'image géométrique de l'objet :

$$a_g(x_1,y_1) = a_o(G_t \cdot x, G_t \cdot y)$$

Où  $a_o(x,y)$  représente la forme analytique de l'objet  
 $G_t$  représente le grandissement transversal du système optique.

**On écrira donc :**  $a_i(x',y') = a_g(x',y') ** f(x',y')$

La réponse impulsionnelle étant connue, l'image donnée par le système peut être calculée.

De ce point de vue la réponse impulsionnelle est une fonction importante pour caractériser un système.

En optique sa détermination pourra être faite en éclairant le système avec une source ponctuelle.

La caractérisation de la réponse d'un système optique, selon qu'il est éclairé en lumière cohérente ou incohérente peut se faire de façon pratique en utilisant la notion de fonction de transfert.

## Fonction de Transfert Cohérente (FTC) : $\mathcal{T}_{coh}$

En électronique les caractéristiques en fréquence d'un amplificateur peuvent être déterminées en mesurant la distribution en fréquence du signal de sortie (par l'intermédiaire d'un analyseur de spectre TF) lorsqu'un signal impulsionnel dans le temps est appliqué à l'entrée de l'amplificateur.

Ceci est possible parce que le signal d'entrée a une amplitude constante sur tout le spectre ( $TF[\delta(t)] = 1$ )

Une démarche analogue peut être adoptée en optique en prenant la transformée de Fourier de la réponse impulsionnelle.

$$\hat{a}_i(u, v) = \hat{a}_g(u, v) \hat{f}(u, v) = \hat{a}_g(u, v) \mathcal{T}_{coh}$$

$$\mathcal{T}_{coh} = \frac{\hat{a}_i(u, v)}{\hat{a}_g(u, v)} = \hat{f}(u, v) = \frac{\hat{a}_i(u, v)}{\hat{a}_o(u, v)}$$

Où on choisi ici arbitrairement d'écrire  $a_g(x, y) = a_o(x, y)$  à  $\mathcal{G}_r$  près, ce qui correspond au cas où la fonction  $a_g$  est la même que  $a_o$ , ce qui signifie que la répartition d'amplitude dans l'image est identique à celle de l'objet.

La fonction de transfert en lumière cohérente apparaît donc comme la transformée de Fourier de la réponse impulsionnelle du système optique.

Cette expression montre l'intérêt de l'analyse dans le domaine des fréquences spatiales (ou un simple produit de fonction apparaît) par contraste avec ce qui peut être fait dans le domaine des variables d'espace (où c'est un produit de convolution qui intervient).

### d. Eclairage en lumière incohérente

Le même raisonnement peut être fait que dans le cas de l'éclairage en lumière cohérente, mais ce sont cette fois les intensités qui s'ajoutent :

$$I_i(x', y') = I_g(x', y') ** d(x', y')$$

$d$  est la réponse impulsionnelle incohérente, c'est la figure de diffraction dans le plan image d'un point de l'objet.

$$d(x', y') = f(x', y') f^*(x', y')$$

La transformée de Fourier est :

$$\hat{d}(u, v) = \hat{f}(u, v) * \hat{f}^*(-u, -v) = \hat{f} \otimes \hat{f}$$

On pose :  $\mathcal{T}_{incoh} = \hat{f} \otimes \hat{f} = \mathcal{T}_{coh} \otimes \mathcal{T}_{coh}$

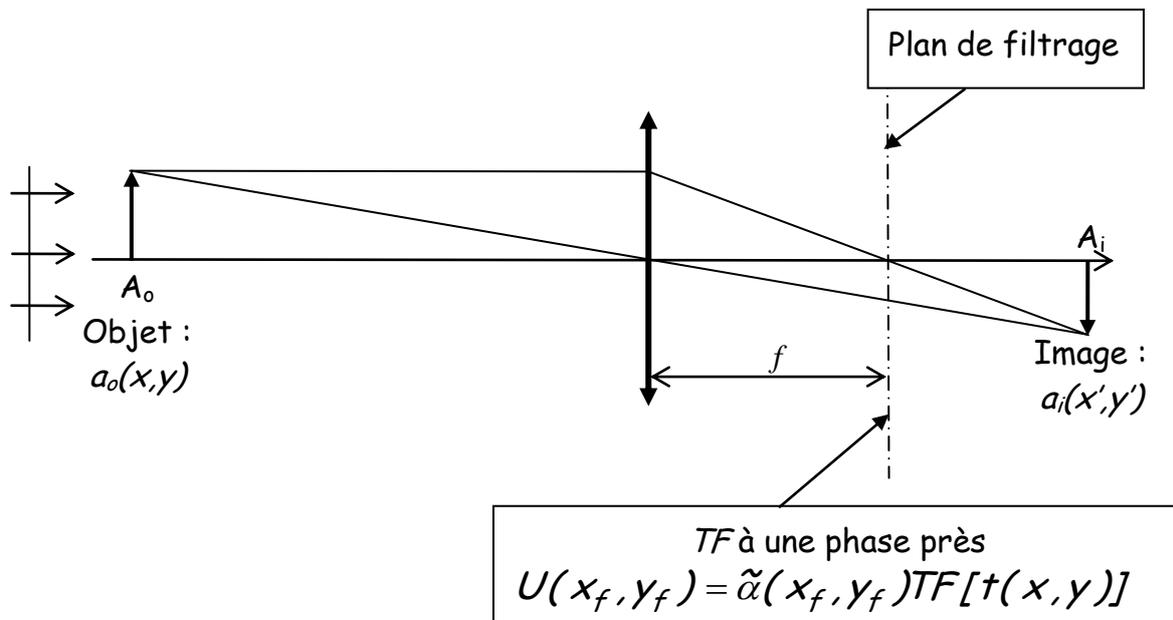
$\mathcal{T}_{incoh}$  est l'autocorrélation de la fonction de transfert cohérente

$\mathcal{T}_{incoh}$  est la fonction de transfert en lumière incohérente (FTI)

### III. Filtrage optique : montages optiques pour filtrage des images

Les expressions établies précédemment montrent le rôle très important que joue la transformée de Fourier. On a vu que celle-ci apparaît avec un plus ou moins grand degré « d'exactitude » au niveau du plan focal d'une lentille. On pourra intervenir dans ce plan en modifiant sa transmittance et modifier ainsi la fonction de transfert du système. C'est sur ce principe que repose le filtrage optique qui permet aussi de modifier (« instantanément ») une image donnée par un système optique.

#### 1. Montage à 1 lentille : action d'un masque



On admettra que le montage à 1 lentille est équivalent, entre un plan objet et son plan conjugué dont le grandissement transversale vaut  $G_t$ , à un montage  $4f$ , ou plus exactement à un montage  $2f_1 + 2f_2$  tel que  $f_1/f_2 = G_t$

#### i) Lumière cohérente

Dans le plan image :  $a_i = a_o * f$   $f$ : réponse impulsionnelle

*Optique de Fourier et formation des images*

Yann VAILLS – date de dernière mise à jour : 06/09/2019

Ce cours est disponible à l'adresse suivante : <http://www.cemhti.cnrs-orleans.fr/?nom=Vaills>

Dans le plan focal image de la lentille on a (à un terme de phase près) :

$$\hat{a}_i = \hat{a}_g \cdot \hat{f} \quad \text{ici } \hat{a}_g = \hat{a}_o \text{ et } \hat{f} = \mathcal{T}_{coh}$$

$\hat{a}_g (= \hat{a}_o)$  apparaît ici dans le plan focal (PF) de la lentille

$$\hat{a}_i = \hat{a}_g \mathcal{T}_{coh}$$

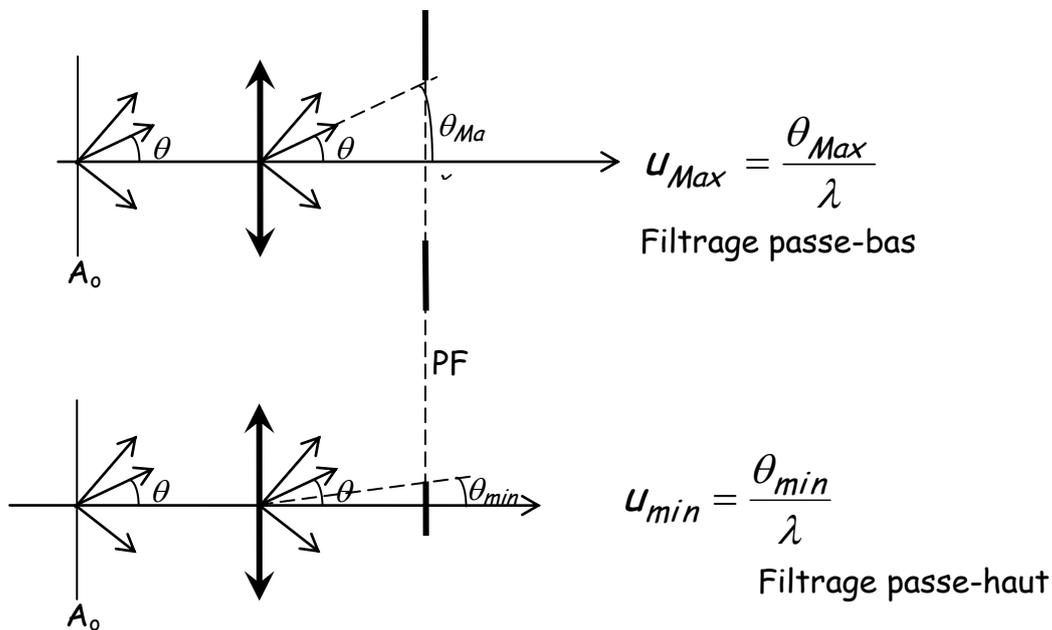
Soit, si on met un masque de transmittance  $t$  dans le PF ( $t$  réel) :

on a :  $\mathcal{T}_{coh} = t$  et :

$$\hat{a}_i = \hat{a}_g \cdot t \xrightarrow{\text{TF}} \hat{a}_i = \hat{a}_g * \hat{f} \text{ ou } \boxed{a_i = a_g * \hat{f}}$$

- $\hat{a}_i = \hat{a}_g \cdot t$  : ceci correspond à une opération de filtrage linéaire des fréquences spatiales dans le plan focal de la lentille  
 $t$  est une transmittance de cache (amplitude  $t(X,Y)$ , phase indépendante de  $X,Y$ )

Signification physique :



- En pratique le calcul de  $a_i$  pourra être fait :
  - directement  $a_i = a_g * f$
  - il est souvent avantageux d'effectuer le calcul de la façon suivante, en passant par l'intermédiaire de ce qui se passe dans le plan focal image de la lentille :

dans le plan où se forme l'image on a :

$$a_i = a_g * f$$

dans le PF on a :

$$\hat{a}_i = \hat{a}_g \cdot \hat{f} = \hat{a}_g \cdot \mathcal{T}_{coh} = \hat{a}_g \cdot t$$

Il est donc souvent plus facile de considérer ce qui apparaît dans le PF. Il s'agit du produit de la TF de l'image géométrique de l'objet  $\hat{a}_g$  par la transmittance  $t$  de masque, soit :  $\hat{a}_g \cdot t$

Ce produit peut aussi être regardé comme celui de la TF de l'image géométrique de l'objet par la fonction de transfert du système en lumière cohérente.

Enfin on obtient l'amplitude de l'image en prenant la TF de ce dernier résultat :

$$\hat{a}_i = TF(\hat{a}_g \cdot t) = a_i$$

## ii) Lumière incohérente

Le même raisonnement peut être suivi. Ce sont, comme nous l'avons montré, les intensités qui s'ajoutent dans ce cas.

$$I_i = I_g * d \quad \text{où} \quad d = ff *$$

$$\mathcal{T}_{incoh} = \hat{f} * \hat{f} * = \hat{f} * \hat{f} = \mathcal{T}_{coh} * \mathcal{T}_{coh}$$

$$\mathcal{T}_{incoh} = t \otimes t = t * t \quad (t \text{ est réel})$$

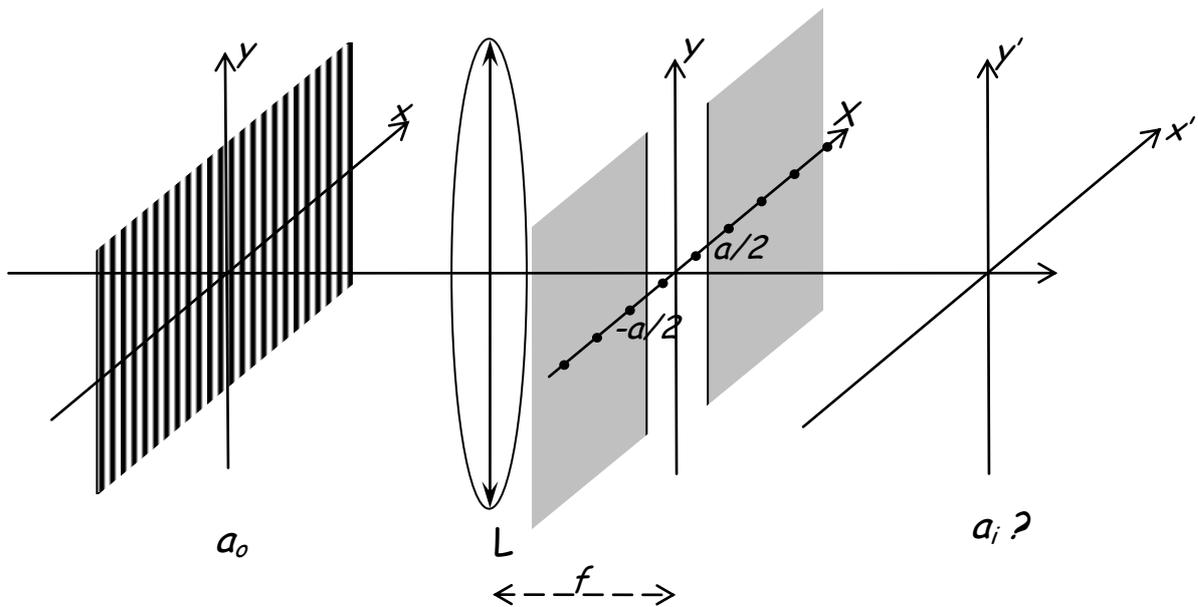
Le filtrage se réduit ici à l'autocorrélation de la transmittance du masque.

$$\hat{I}_i = \hat{I}_g \cdot \mathcal{T}_{incoh}$$

$$I_i = TF(\hat{I}_g \mathcal{T}_{incoh}) = TF[\hat{I}_g \cdot (t * t)]$$

### Exemple : image d'un réseau filtré par une fente :

On choisi ici de filtrer l'image d'un réseau de fentes infiniment fines par une fente de largeur  $a$



**i) En lumière cohérente :**

$$a_o(x, y) = pgn\left(\frac{x}{p}\right)1_y \quad \hat{a}(u, v) = pgn(up)\delta(v)$$

En (X,Y) avant le masque on a :  $\hat{a}(X, Y) = \frac{1}{p} pgn\left(\frac{X}{\lambda f} p\right)\delta(Y)$

Masque en (X,Y) :  $t(X, Y) = \Pi\left(\frac{X}{a}\right)1_Y = \mathcal{T}_{coh}$

En (X,Y) après le masque on a :  $\Pi\left(\frac{X}{a}\right)\frac{1}{p} pgn\left(\frac{p}{\lambda f} X\right)\delta(Y)$

Dans le plan image on a donc :

$$a_i(x', y') = {}^2TF\left[\Pi\left(\frac{X}{a}\right)\frac{1}{p} pgn\left(\frac{p}{\lambda f} X\right)\delta(Y)\right] = {}^2TF\left[\frac{1}{p} \sum_{\substack{n=-\frac{a}{2} \\ \frac{n\lambda f}{p} = -\frac{a}{2}}}^{\frac{a}{2}} \delta\left(\frac{X}{\lambda f} - \frac{n}{p}\right)\right]1_{y'}$$

$$a_i(x', y') = \frac{1}{p} \sum_{\substack{n=-\frac{ap}{2\lambda f} \\ n \text{ entier}}}^{\frac{ap}{2\lambda f}} e^{-2i\pi x' \frac{n}{p}} \cdot 1_{y'}$$

**ii) En lumière incohérente :**

$$I_o(x, y) = pgn\left(\frac{x}{p}\right)1_y$$

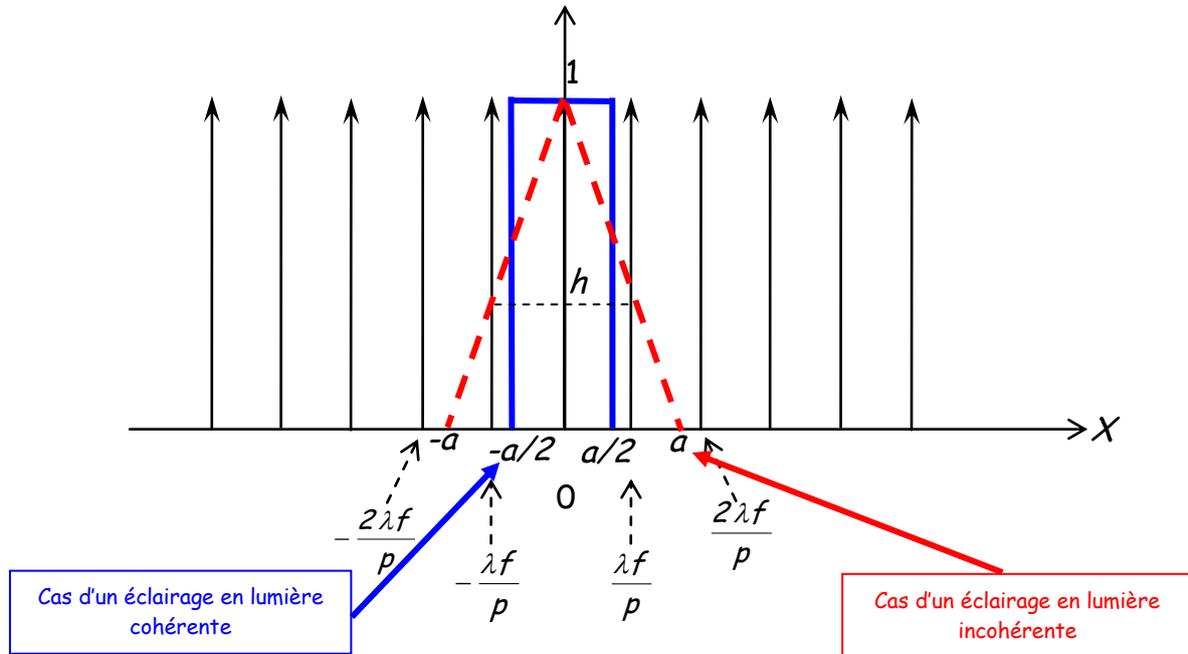
En (X,Y) avant le masque :  $\hat{I}_o(u, v) = \frac{1}{p} pgn(up)\delta(v)$

Soit :  $\hat{I}_o(X, Y) = \frac{1}{p} pgn\left(\frac{X}{\lambda f} p\right)\delta(Y)$

Masque en (X,Y) :  $\mathcal{T}_{incoh} = t * t = \Lambda\left(\frac{X}{a}\right)1_Y$

$$I_i(x', y') = TF \left\{ \Lambda \left( \frac{X}{a} \right) \frac{1}{p} \text{pgn} \left( \frac{X}{\lambda f} p \right) \right\} 1_{y'}$$

La figure ci-dessous montre ce qui se passe dans le plan de filtrage, selon le type de lumière utilisée.



### Lumière cohérente :

La fente joue le rôle d'un filtre passe-bas pour les fréquences  $u$ . La fréquence de coupure dans le plan du diaphragme est  $a/2$  à comparer avec  $\lambda f/p$

Si  $a/2 < \lambda f/p$  alors seule passe la composante à fréquence nulle et :

$$\hat{a}_i(u) = \text{pgn}(u) \Pi \left( \frac{X}{a} \right) = \delta(X)$$

$$a_i(x') = C^{te} \quad I_i = 1_{x'}$$

### Lumière incohérente :

$$\hat{I}_i(u) = \hat{I}_g(u, v) \mathcal{C}_{\text{incoh}} = \text{pgn} \left( \frac{pX}{\lambda f} \right) \Lambda \left( \frac{X}{a} \right)$$

$$\hat{I}_i(u) = \delta(X) + h \left[ \delta \left( \frac{X}{\lambda f} - \frac{1}{p} \right) + \delta \left( \frac{X}{\lambda f} + \frac{1}{p} \right) \right]$$

*Optique de Fourier et formation des images*

Yann VAILLS – date de dernière mise à jour : 06/09/2019

Ce cours est disponible à l'adresse suivante : <http://www.cemhti.cnrs-orleans.fr/?nom=Vaills>

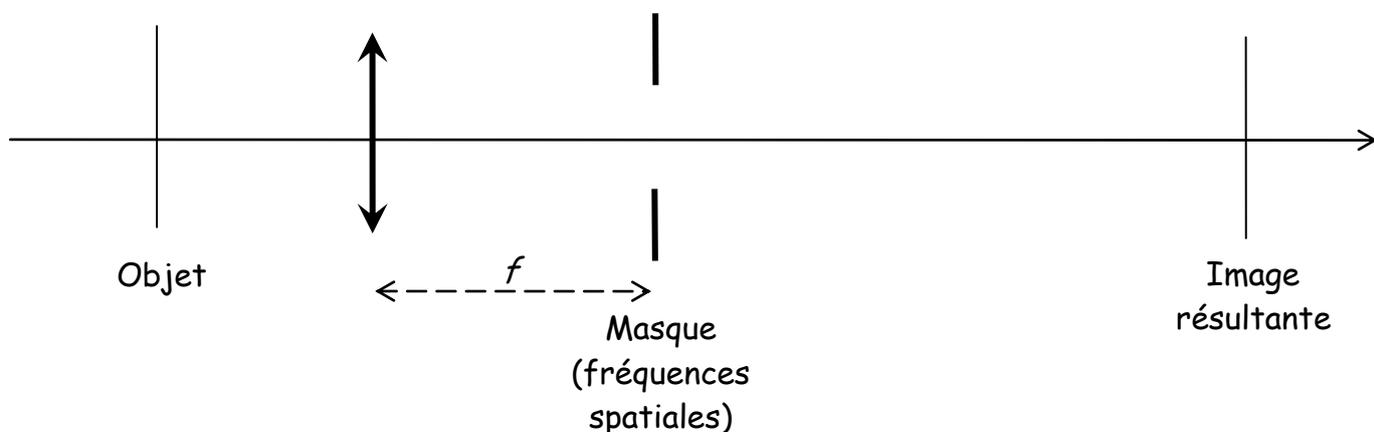
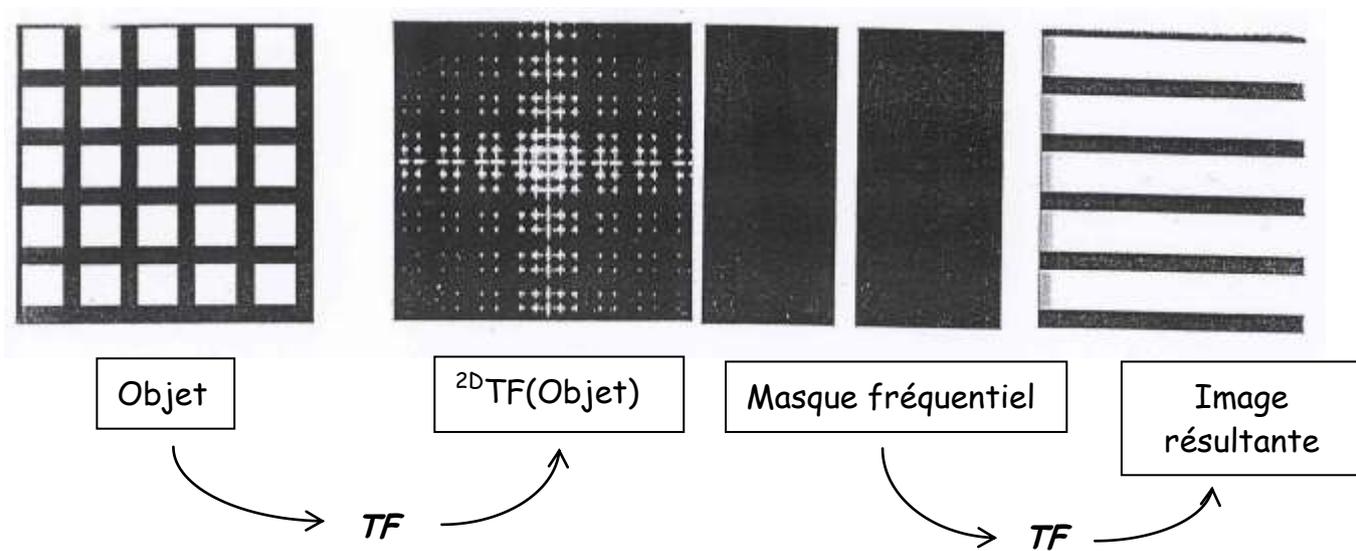
$$I_i(x') = 1 + 2h \cos\left(2\pi \frac{x'}{p}\right)$$

Le diaphragme laisse passer les fréquences spatiales  $u = 0$  et  $\pm 1/p$

Dans le plan image l'intensité varie sinusoidalement et les variations spatiales permettent de remonter à la période  $p$

Ceci décrit le principe des filtres : passe-bas, passe-haut, passe-bande

### Illustration d'un filtrage 2D :



*Optique de Fourier et formation des images*

Yann VAILLS – date de dernière mise à jour : 06/09/2019

Ce cours est disponible à l'adresse suivante : <http://www.cemhti.cnrs-orleans.fr/?nom=Vaills>

## Expérience de Abbe et Porter : filtrage 2D

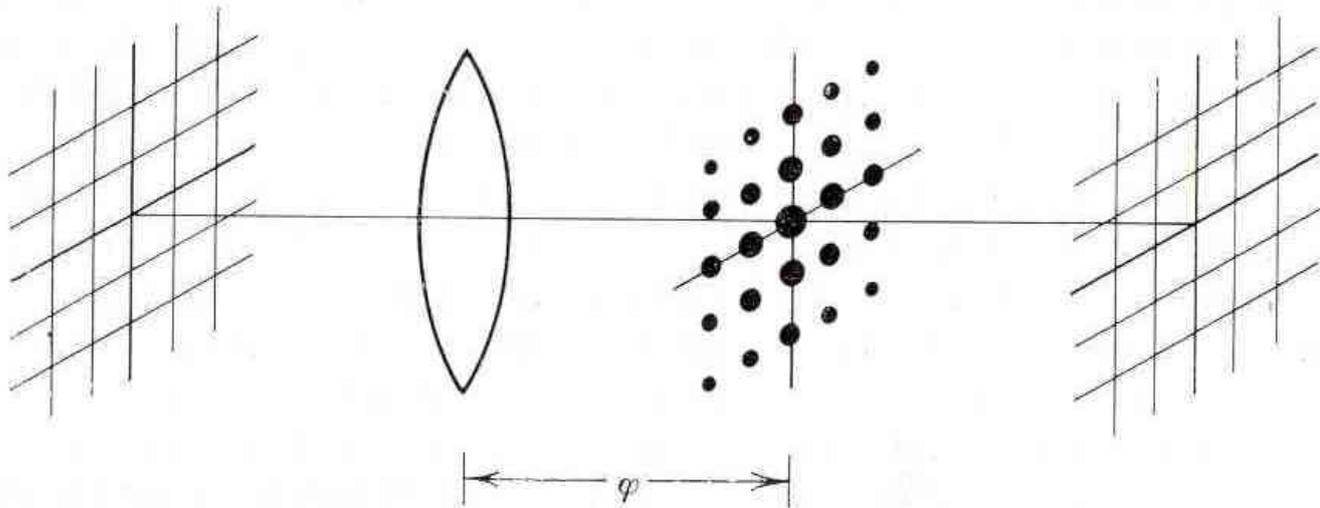
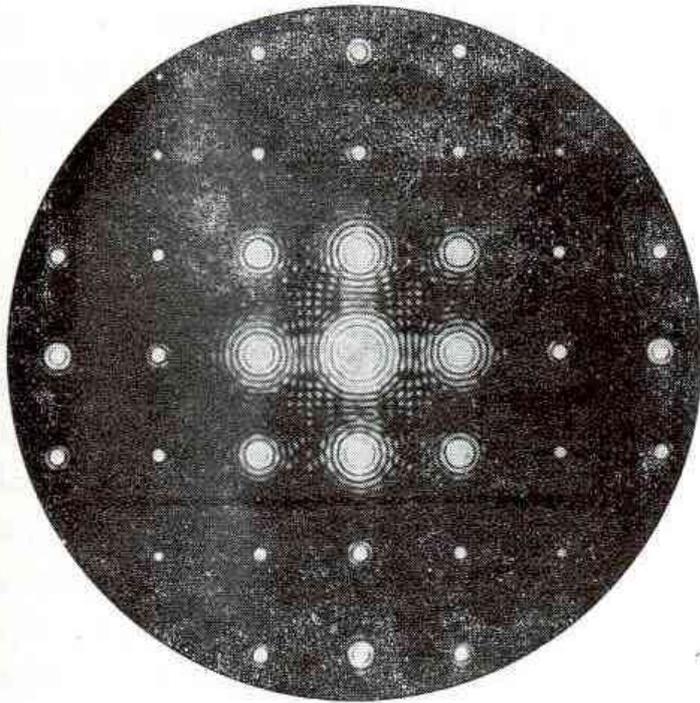
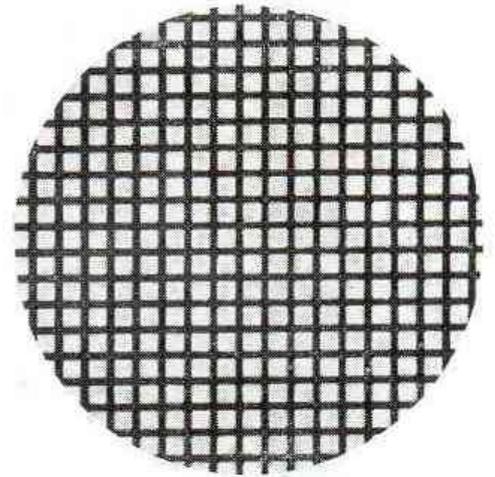


FIG. 7-1. – L'expérience de Abbe et Porter.



(a)



(b)

FIG. 7-2. – a) Spectre non modifié d'une grille. b) Image correspondante.



(a)



(b)

FIG. 7-3. – Grille filtrée à l'aide d'une fente horizontale. a) Le spectre; b) l'image.

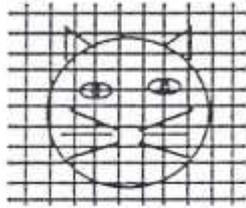


(a)

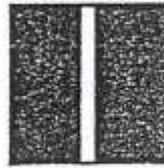
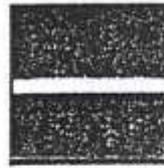


(b)

FIG. 7.4. — Grille filtrée à l'aide d'une fente verticale. a) Le spectre ; b) l'image.



Objet initial



Forme du filtre

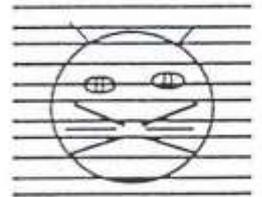
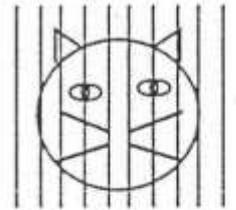
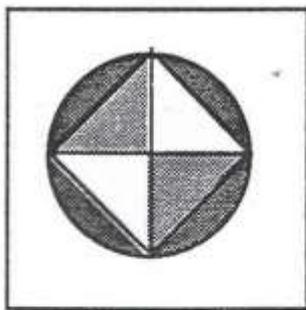
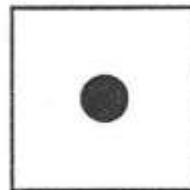
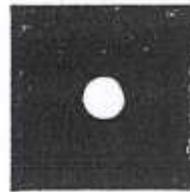


Image définitive

*Reconstitution de l'image d'un chat photographié à travers un treillage à mailles carrées*



Objet initial



Forme du filtre

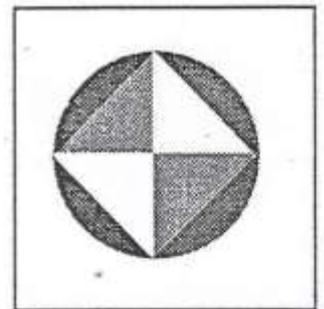
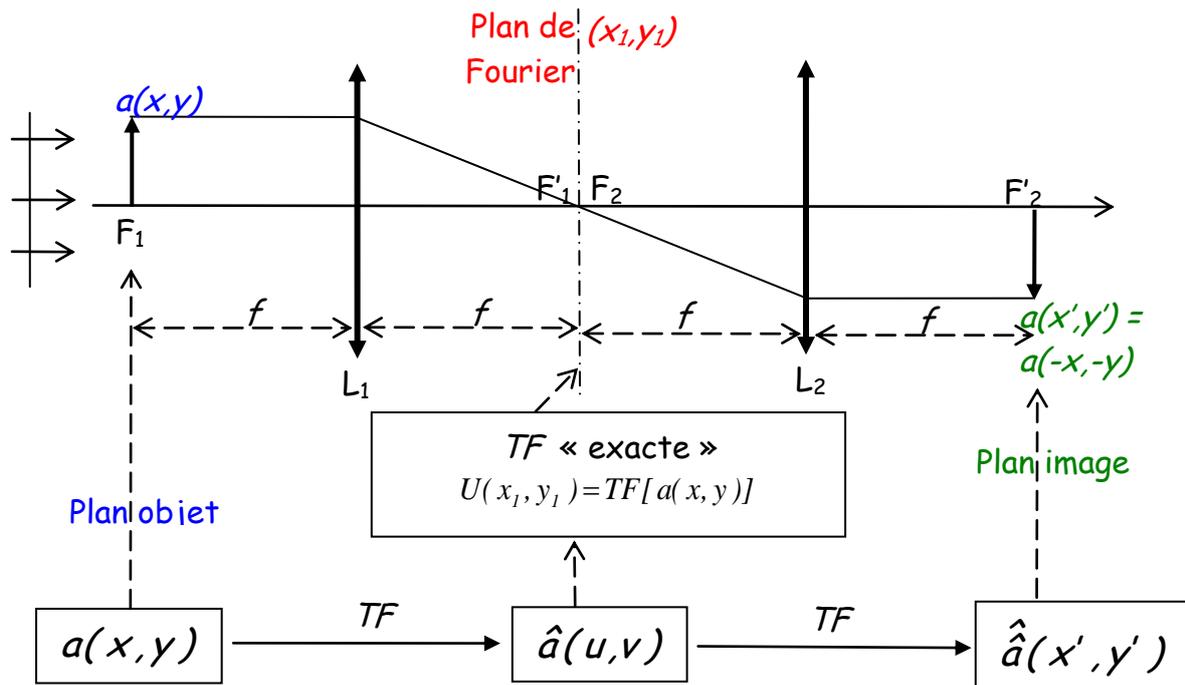


Image définitive

*Détecteur de contour. Avec un filtre passe haut, il n'y a de lumière que dans les régions où le gradient d'intensité a une valeur importante : les contours de l'image apparaissent alors en traits clair sur fond sombre*

## 2. Montage à 2 lentilles (type « 4f »)

Dans un tel montage on aura donc une double diffraction et on opérera un filtrage en lumière cohérente.



Dans le plan de Fourier apparaît la transformée de Fourier « exacte ». On pourra y placer des filtres qui agiront sélectivement sur certaines fréquences spatiales : sur l'amplitude et sur la phase.

Si  $h(x_1, y_1)$  est la fonction de filtrage

Dans le plan image on a :

$$\hat{h}\left(\frac{x'}{\lambda f}, \frac{y'}{\lambda f}\right) = TF[h]$$

L'amplitude dans le plan de filtrage est donc :

$$\hat{a}\left(\frac{x_1}{\lambda f}, \frac{y_1}{\lambda f}\right) h(x_1, y_1)$$

On a alors dans le plan de sortie :

$$a_{filtrée}(x', y') = a(-x', -y') ** \hat{h}\left(\frac{x'}{\lambda f}, \frac{y'}{\lambda f}\right)$$

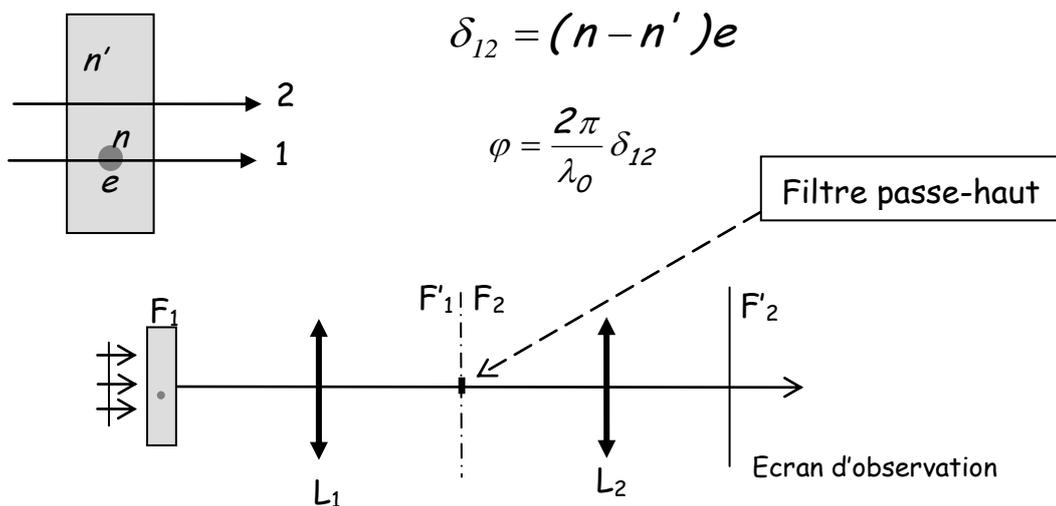
Où il apparaît que  $\hat{h}\left(\frac{x'}{\lambda f}, \frac{y'}{\lambda f}\right)$  est la réponse impulsionnelle du filtre en lumière cohérente (RIC).

### Exemple 1: filtre passe-haut : perception des « objets de phase » :

On appelle ainsi des objets introduisant une différence de marche optique sur le parcours d'une onde qui les traverse (variation d'indice, d'épaisseur) sans affecter l'amplitude (cas des objets transparents). Ces objets ne présentent pas de contraste avec le champ qui les entoure et sont donc invisibles par les méthodes ordinaires.

La différence de marche entre les deux parcours représentés est :

$$\delta_{12} = (n - n')e, \text{ la différence de phase correspondante est } \varphi = \frac{2\pi}{\lambda_0} \delta_{12}$$



Le plan objet transmet l'amplitude  $Ae^{i\varphi(x,y)}$  avec  $\varphi \ll 1$  radian. On traitera le cas où l'on peut considérer le déphasage comme constant sur l'ensemble du « défaut » ou petit objet, soit  $\varphi(x,y) = \varphi_0$  : En conséquences on pourra écrire que l'amplitude transmise par l'objet est :

$$Ae^{i\varphi(x,y)} = A[1 + i\varphi(x,y)]$$

Dans le plan de Fourier on a :

$$\hat{a}(u,v) = A[\delta(u,v) + i\hat{\varphi}(u,v)]$$

Soit :

$$\hat{a}(x_1, y_1) = A[\delta(x_1, y_1) + i\hat{\varphi}(x_1, y_1)]$$

### *i) Strioscopie*

On place dans le plan de Fourier un cache opaque sur l'axe optique. Il va éliminer « la fréquence spatiale nulle » (filtre passe-haut). Ceci correspond à l'élimination dans l'image d'un fond continu. Ainsi immédiatement après ce filtre l'intensité sera :

$$\hat{a}(x_1, y_1) = Ai\hat{\varphi}(x_1, y_1)$$

Et dans le plan image on aura :

$$\hat{a}(x', y') = Ai\hat{\varphi}(x', y') \quad \text{et} \quad I(x', y') = A^2 |\hat{\varphi}(x', y')|^2$$

Soit dans notre cas :

$$\hat{a}(x', y') = iA\varphi_0 \quad \text{et} \quad I(x', y') = A^2 \varphi_0^2$$

Cette technique, appelée « **strioscopie** », permet de percevoir l'image du petit objet sur fond sombre (le reste de l'objet provoque un signal lumineux de fréquence nulle, donc éliminée, dans le plan de Fourier).

### *ii) Contraste de phase*

On place une lame déphasante de petite taille sur l'axe optique et dans le plan de Fourier. Exemple :  $\Phi = \pi/2$

Cette lame va déphaser les rayons lumineux qui caractérisés par une fréquence spatiale nulle. L'amplitude en sortie de plan de filtrage sera donc :

$$\hat{a}(x_1, y_1) = A[\delta(x_1, y_1)e^{i\phi} + i\hat{\phi}(x_1, y_1)] = A[i\delta(x_1, y_1) + i\hat{\phi}(x_1, y_1)]$$

Dans le plan image l'amplitude sera :

$$\hat{a}(x', y') = iA\{1 + \hat{\phi}(x', y')\} = iA\{1 + \varphi_0\}$$

$$\text{Et l'intensité : } I = A^2(1 + \varphi_0)^2 \cong A^2(1 + 2\varphi_0)$$

Cette fois-ci les variations d'intensité sont du 1<sup>er</sup> ordre et le contraste est :  
 $C = \varphi_0$

Sachant qu'un contraste est perceptible à l'œil à partir de 0,1 on peut facilement mettre en évidence par l'image un petit objet correspondant à une variation d'indice  $\Delta n = 0,5$  par rapport à la matrice qui le contient dès que sont épaisseur satisfait :  $C = \varphi_0 = \frac{2\pi(n'-n)e}{\lambda} = 0,1$  soit :  $e \cong 20nm = 0,02\mu m$

Cette performance peut encore être améliorée si la lame déphasante divise l'amplitude du signal par  $N$

$$\text{Dans ce cas l'amplitude de l'image est : } \hat{a}(x', y') = iA\left\{\frac{1}{N} + \varphi_0\right\}$$

L'intensité et le contraste sont alors respectivement :

$$I \cong A^2\left(\frac{1}{N^2} + \frac{2\varphi_0}{N}\right) \quad \text{et} \quad C = N\varphi_0$$

### **Exemple 2: filtre passe-bas**

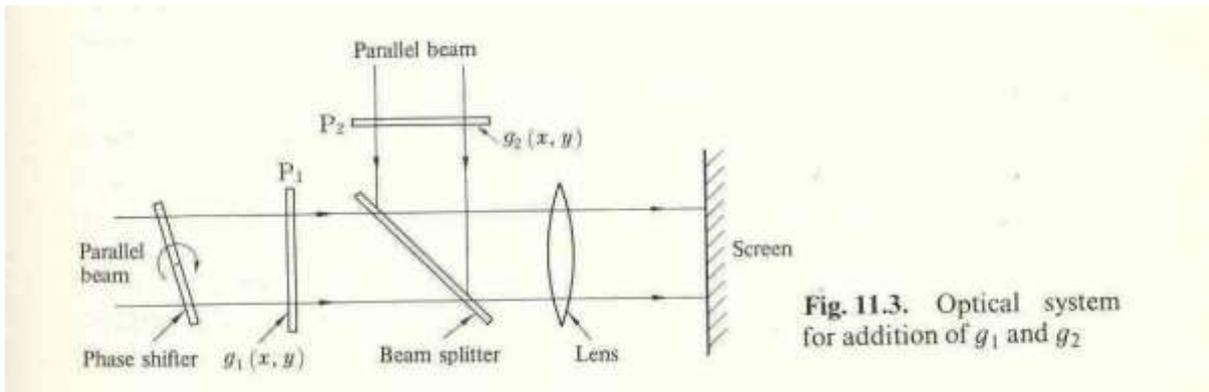
Comme illustration nous verrons le cas du détramage dans le paragraphe ci-dessous sur le traitement de l'image

## **IV. Principe du traitement numérique de l'image optique**

Filtrage spatial et traitement optique de l'information

### **1. Opérations de base pour le « calcul optique »**

- **Addition - soustraction**

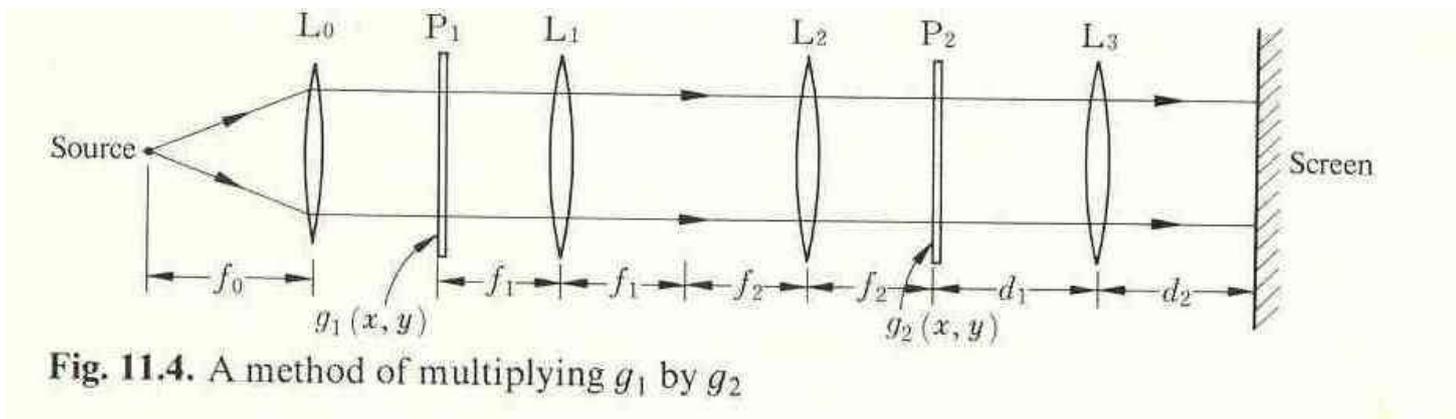


On remarque qu'il s'agit plutôt dans ce cas de l'addition des amplitudes diffractées par  $g_1$  et  $g_2$

Soustraction : il suffit d'ajouter un terme de phase sur l'un des parcours (multiple impair de  $\pi$ ) ce qui peut être réalisé par une inclinaison convenable de la lame à faces parallèles.

- **Multiplication**

Il suffit de superposer les pupilles  $g_1$  et  $g_2$ . De fait pour préserver la qualité des plaques il est préférable de les séparer.

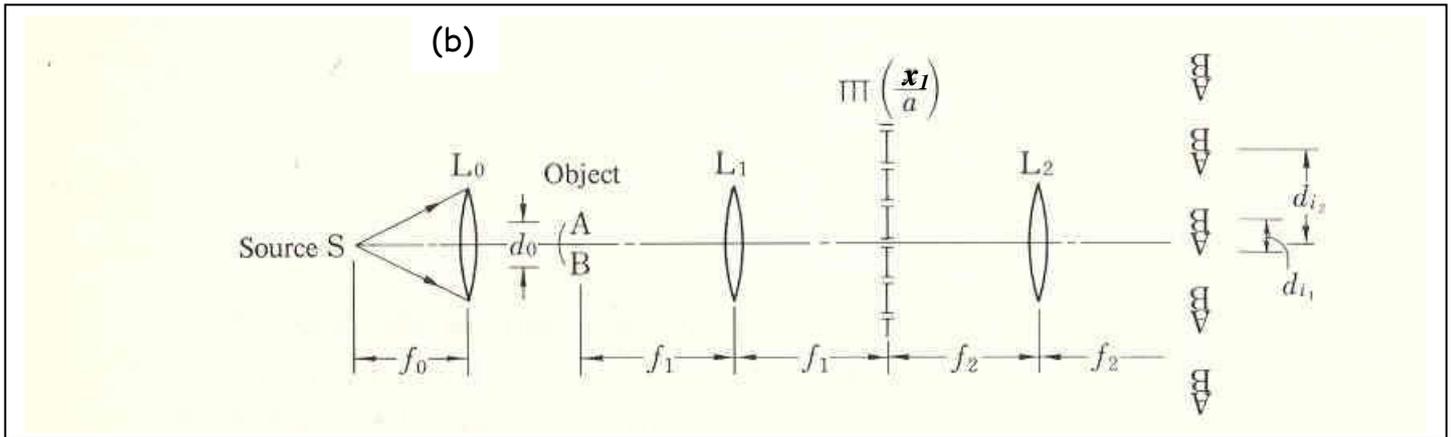


L'ensemble des deux lentilles  $L_1$  et  $L_2$  donne une image réelle de  $P_1$  sur  $P_2$  avec un grandissement transversal égal au rapport des focales des deux lentilles. La lentille  $L_3$  donne sur l'écran une image réelle correspondant au produit  $g_1 g_2$

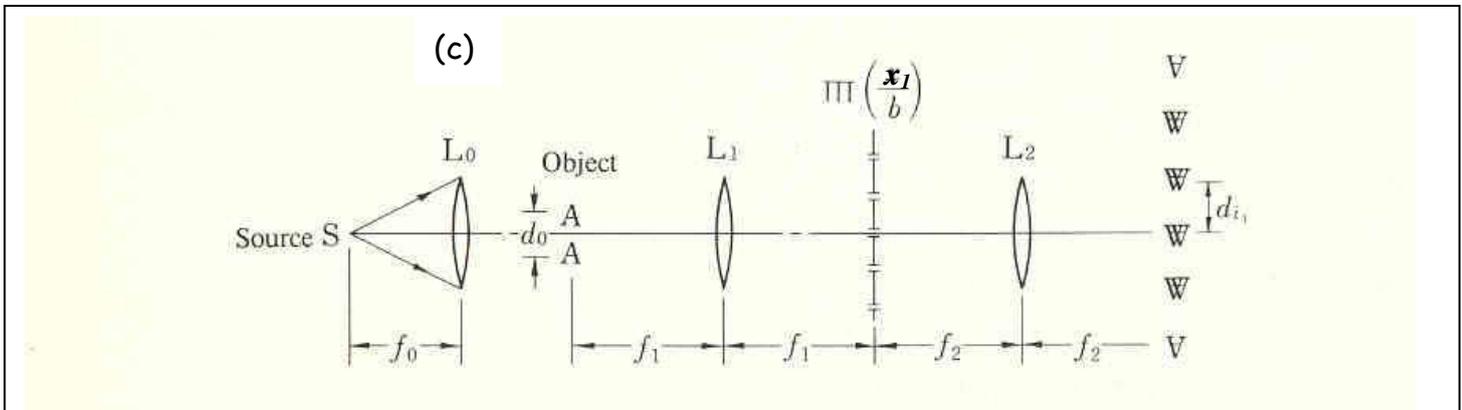
- **Division**

Cf méthode holographique : on réalise une plaque photographique  $\gamma = 2$   
 $g^*$  étant l'hologramme





(b) Formation de plusieurs images « AB »



(c) Ajustement de  $d_0$  permettant la superposition de deux images « A »

A la sortie du masque l'amplitude du signal est donnée par :

$$E_M = K \hat{A} \left( \frac{x_1}{\lambda f_1} \right) \text{pgn} \left( \frac{x_1}{a} \right)$$

Où  $A$  représente l'amplitude de l'objet « A »

La lentille  $L_2$  fait une nouvelle TF dans son plan focal :

$$\hat{E} \left( \frac{x'}{\lambda f_2} \right) = K' A \left( -\frac{f_2}{f_1} x' \right) * \text{pgn} \left( \frac{ax_1}{\lambda f_2} \right)$$

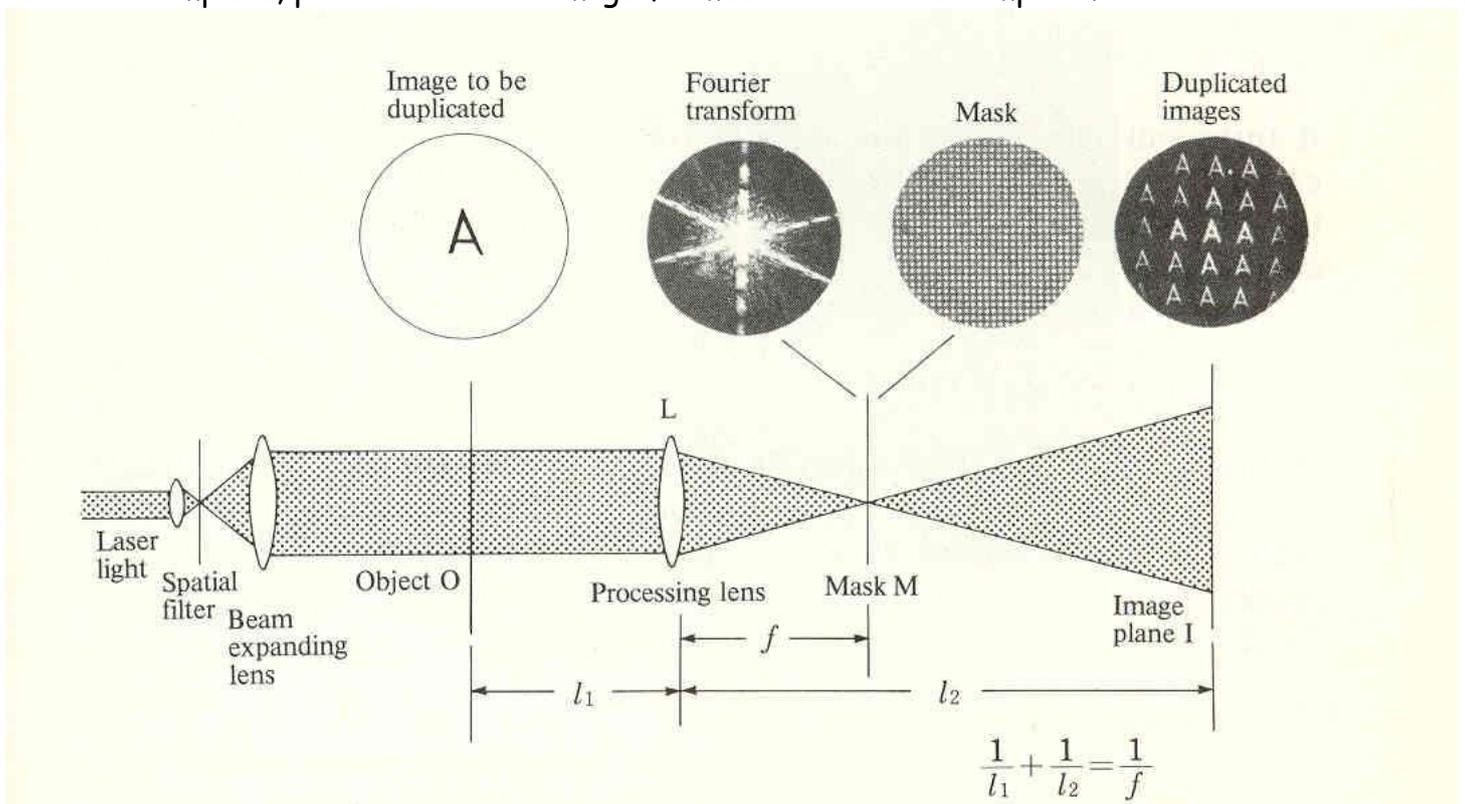
Ce qui crée un grand nombre d'images « A » sur l'écran

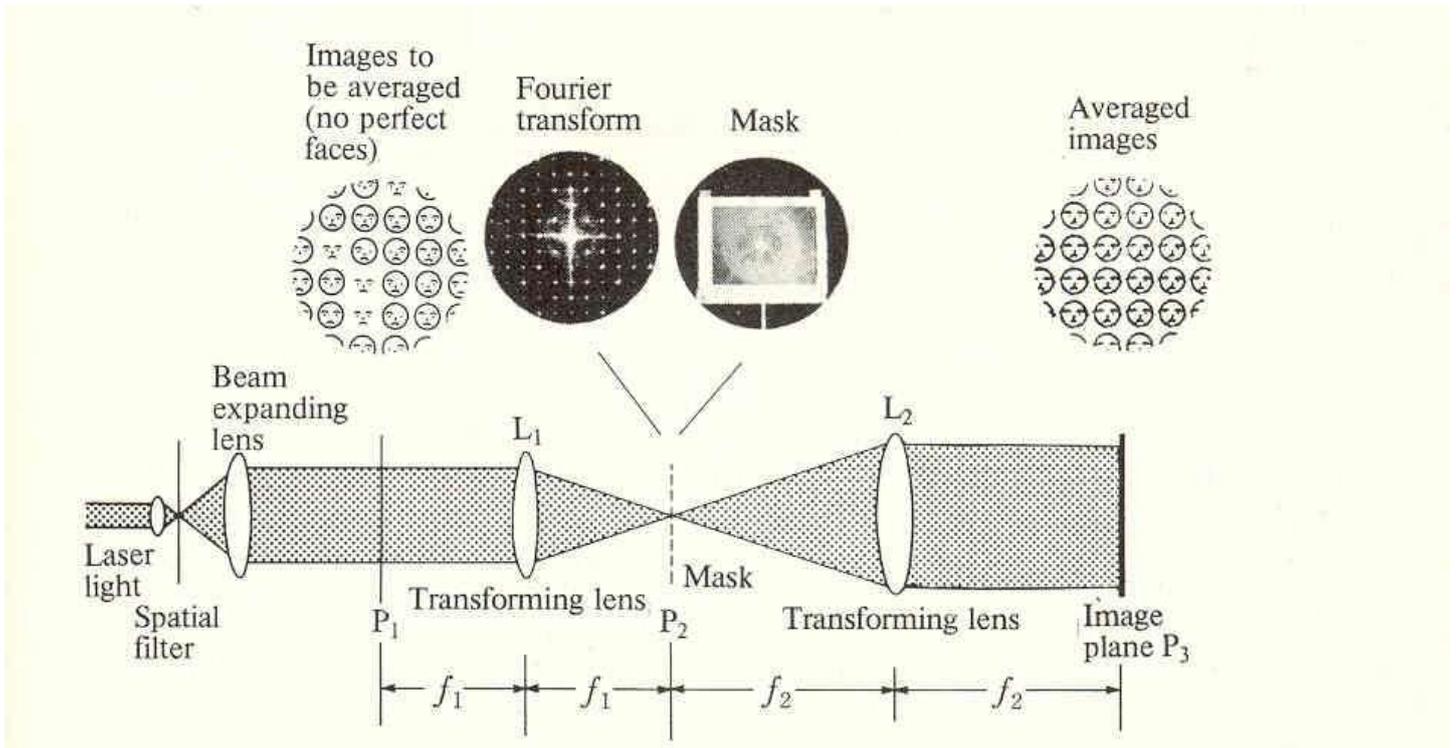
Si « A » est remplacé par « AB » alors sur l'écran on voit une série d'images « AB ». Lorsque la distance A-B croît les images se déplacent et finissent par se superposer. Si on place un couple « AA » dans le plan objet, le recouvrement pour une valeur particulière de l'écart entre les deux lettres redonne simplement une série de « A ».

Si le masque placé dans le plan de Fourier est une grille de points, alors l'image devient un réseau de « A ». Si on place alors dans le plan objet un réseau de « A », l'image est un réseau de « A » dont chaque « A » est la somme de  $N$  « A ». On a alors un effet de moyenne.

Les figures ci-dessous montrent la méthode étendue à 2 dimensions. La lentille joue ici simultanément le rôle de créer la TF de l'objet et l'image géométrique sur l'écran.

On notera dans la deuxième figure que si les visages dans l'objet sont parfois incomplets, par contre dans l'image formée ils sont tous complets.





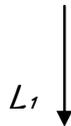
## 2. Filtrage optique d'une image

Montage à deux lentilles avec éclairage en lumière cohérente. Le montage dit «  $4f$  » peut en fait être un montage  $1 + 1$ , c'est-à-dire avec des lentilles de focales différentes.

### a. Exemple 1 : principe du détramage (filtrage passe-bas)

L'image à traiter est une photographie (objet) présentant une structure périodique indésirable (pointillés dans la figure)

Objet : 
$$a(x, y) = g(x, y) \text{pgn}\left(\frac{x}{a}\right) \text{pgn}\left(\frac{y}{b}\right)$$



On a donc un échantillonnage à 2 dimensions

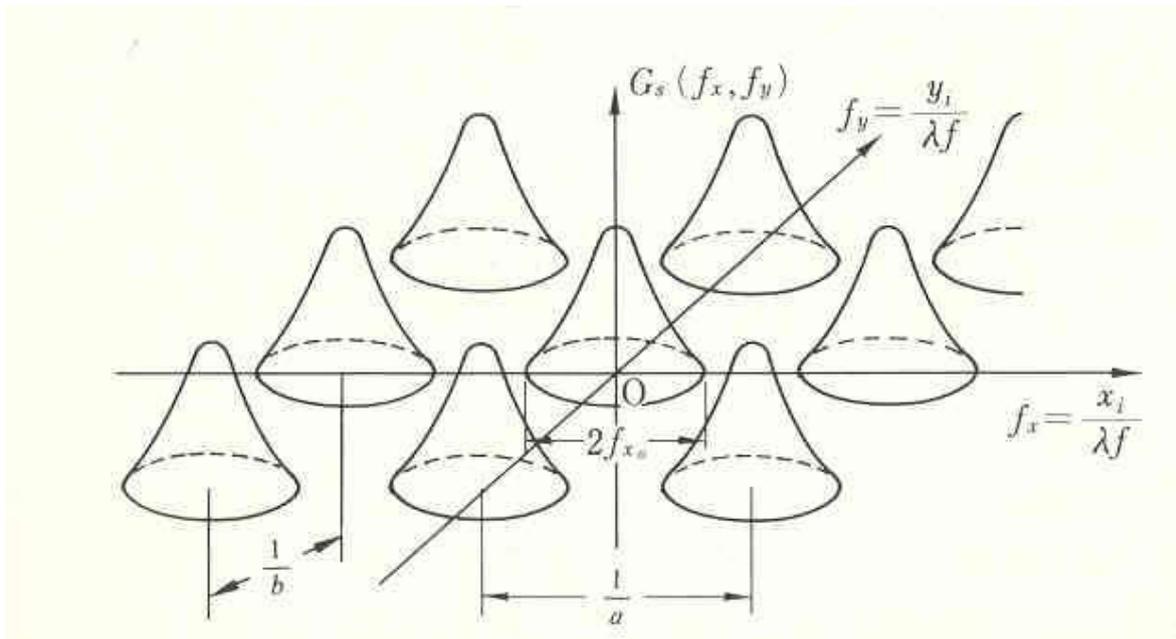
$$\hat{a}(u, v) = \frac{1}{ab} \hat{g}(u, v) ** \text{pgn}(au) \text{pgn}(bv)$$

On a un réseau de taches

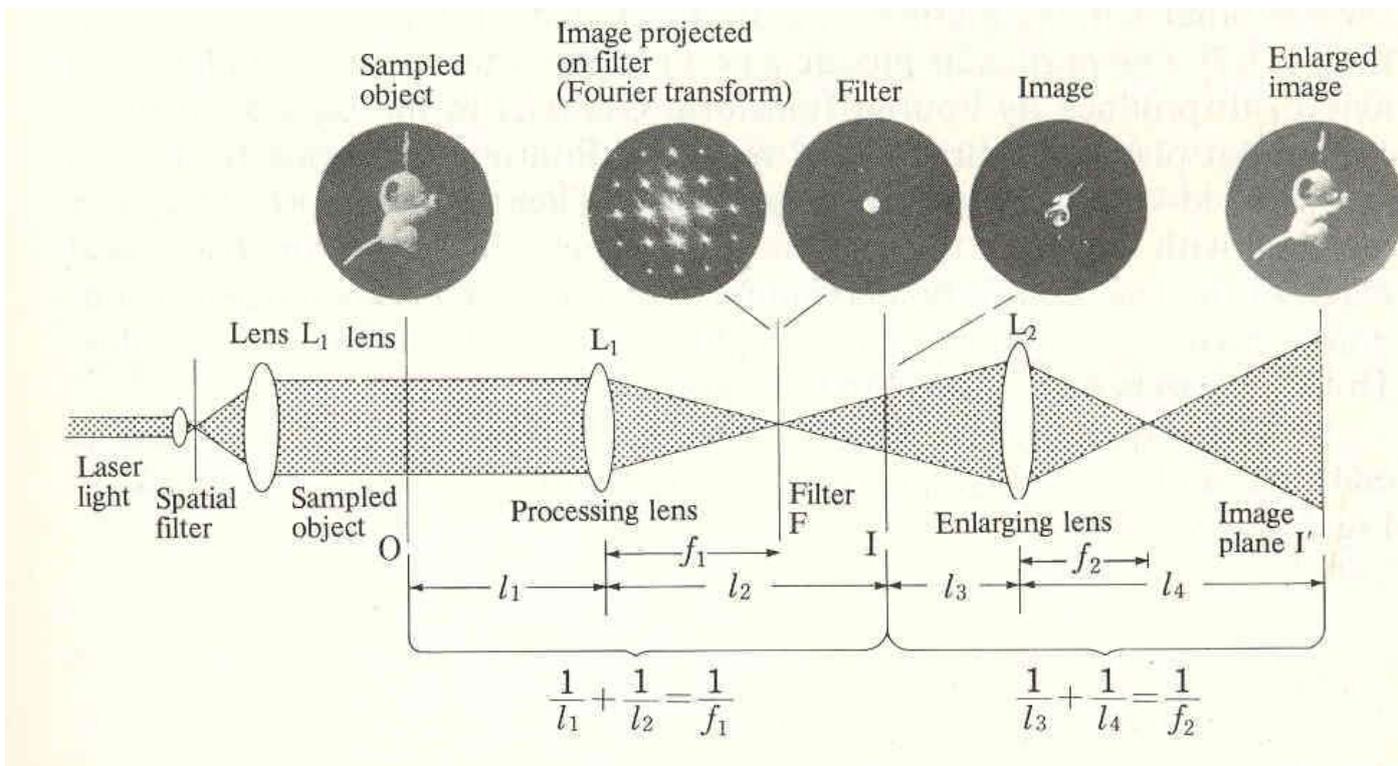
Masque : trou de diamètre  $d$

Seule la tache centrale (centrée en  $u = v = 0$ ) est transmise. Les fréquences spatiales de  $\hat{a}$  correspondant aux points du masque  $\frac{\lambda f}{a} > \frac{d}{2}$  et  $\frac{\lambda f}{b} > \frac{d}{2}$  sont arrêtés et la double périodicité du réseau disparaît : l'image est « détramée ».

Les détails de dimension  $a'$  dans l'objet, tels que  $\frac{1}{a'} > \frac{d}{2\lambda f}$  ont eux aussi disparu.



La transformée de Fourier de  $g_s$  consiste en une « grille » de fonction identiques  $\hat{g}(f_x, f_y) = \hat{g}(u, v) = G(u, v)$

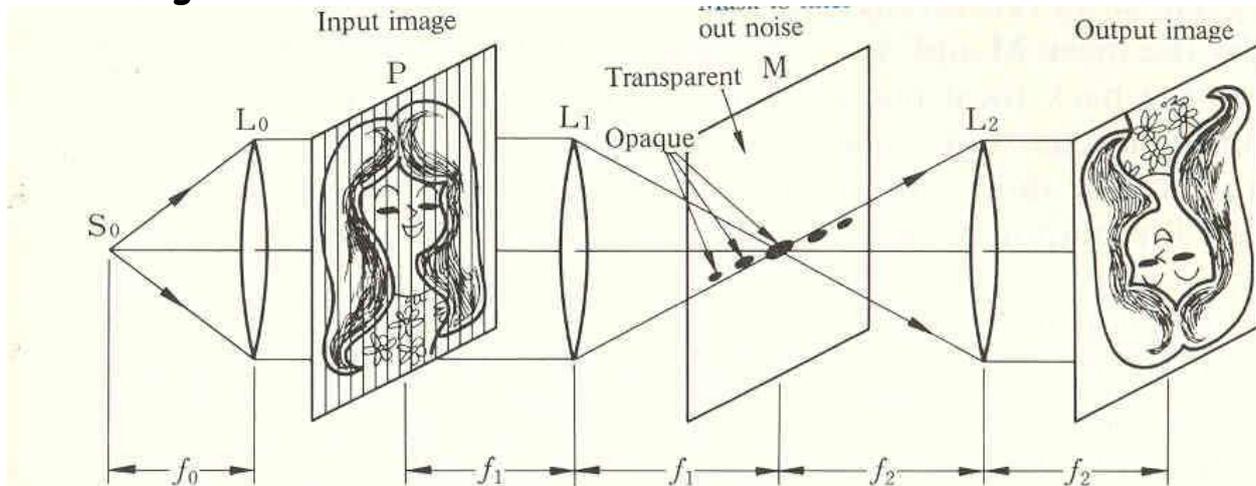


*Optique de Fourier et formation des images*

Yann VAILLS – date de dernière mise à jour : 06/09/2019

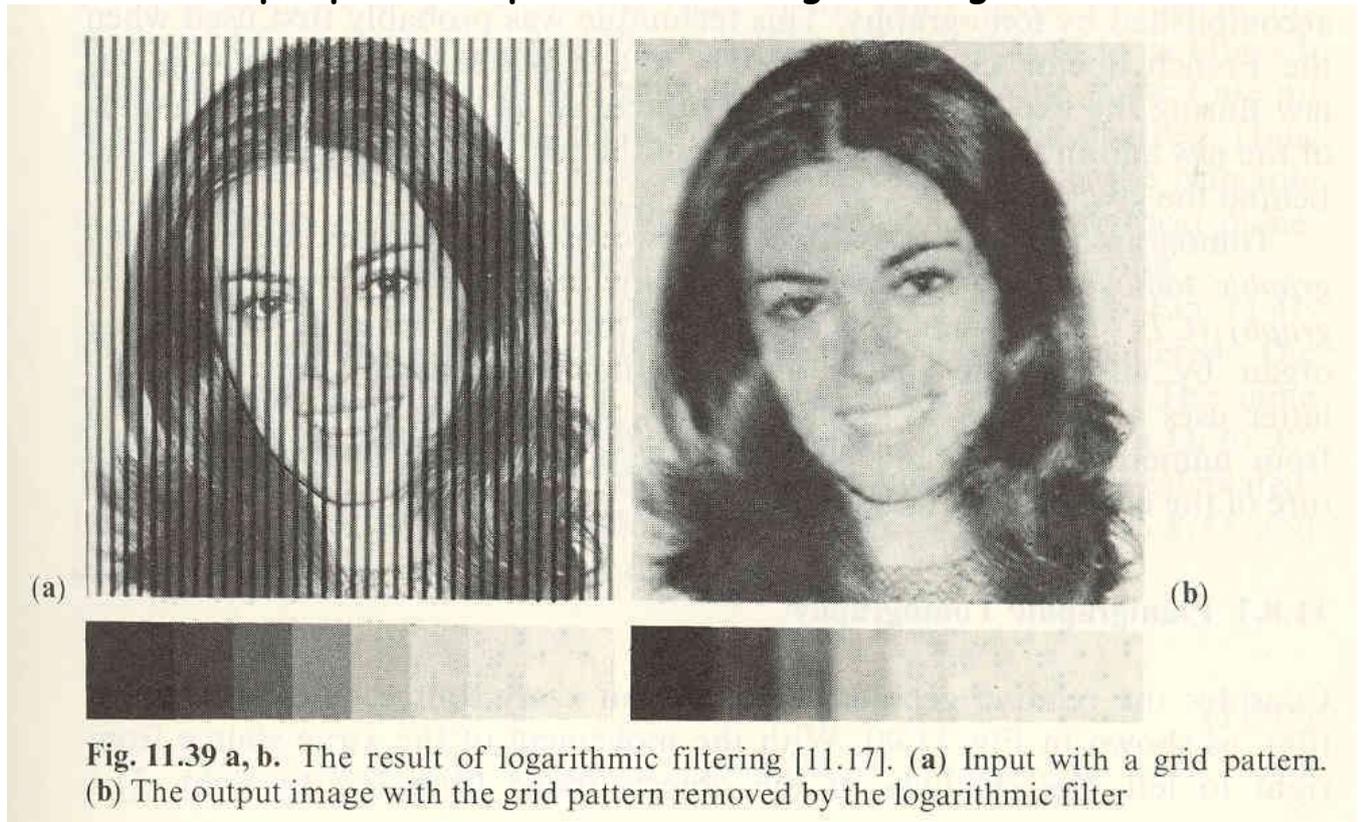
Ce cours est disponible à l'adresse suivante : <http://www.cemhti.cnrs-orleans.fr/?nom=Vaills>

**Système optique utilisé pour retrouver l'image originale à partir d'une image tramée.**

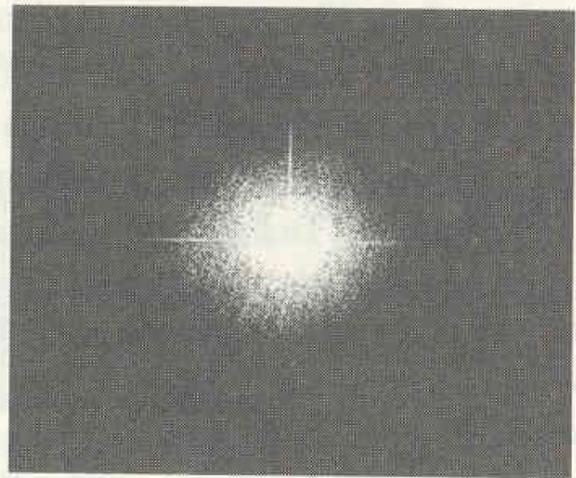
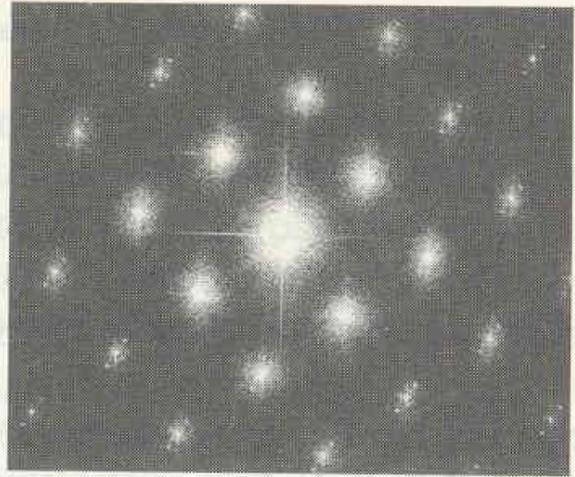


**Fig. 11.38.** Logarithmic filtering. The noise component is filtered out by means of a logarithmic filter  $\mathcal{F}\{\log N(x, y)\}$

**Ci-dessous : quelques exemples de détramages d'images**

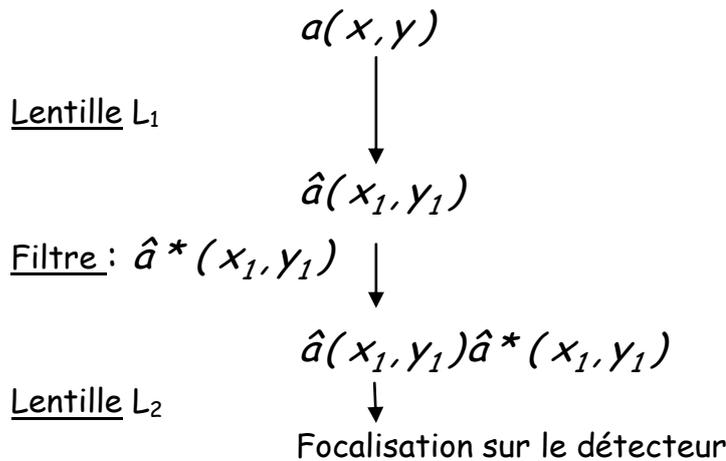


**Fig. 11.39 a, b.** The result of logarithmic filtering [11.17]. (a) Input with a grid pattern. (b) The output image with the grid pattern removed by the logarithmic filter

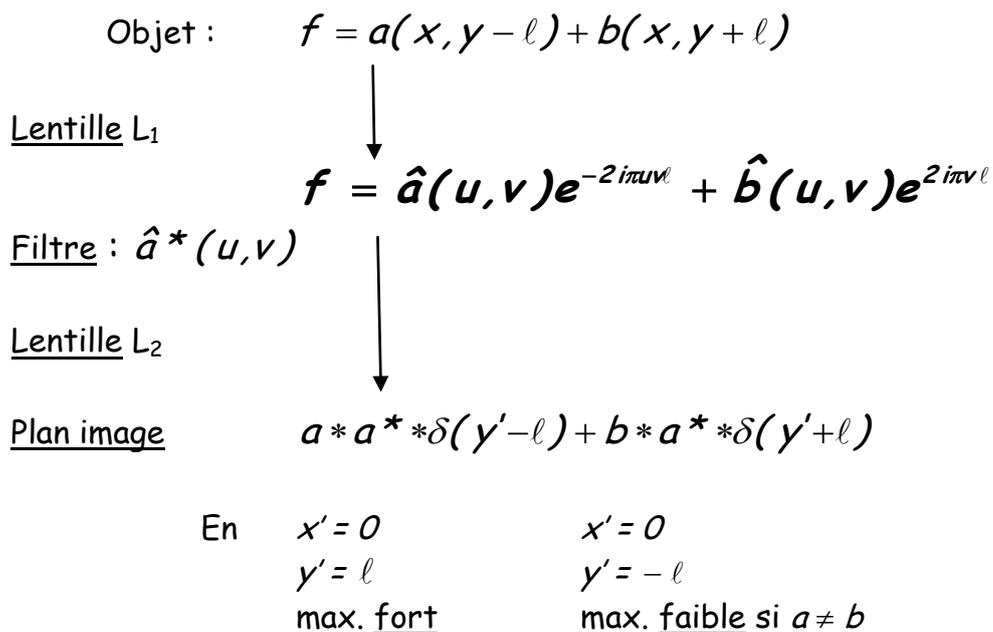


**Fig. 9.21.** Raster elimination of a halftone image by low pass filtering.

**b. Exemple 2 : filtrage adapté (index matching)**



Ce système permet d'identifier un objet déterminé dans un objet composé.



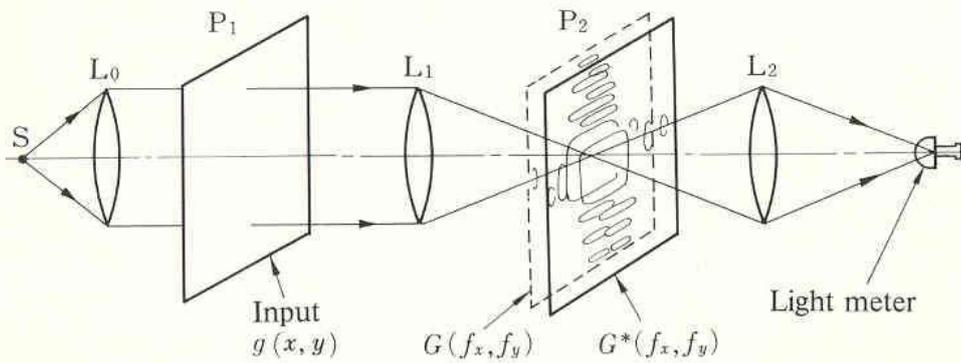
**Le filtre est réalisé selon la méthode holographique**

**Applications :**

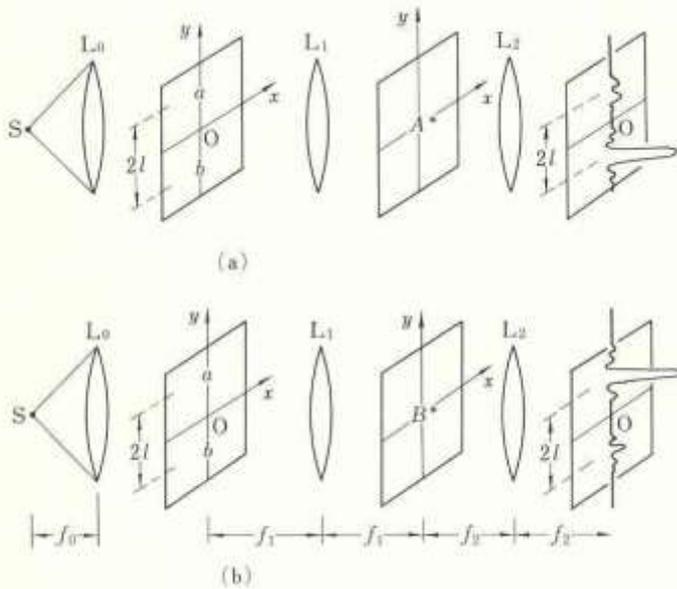
Cette méthode est très puissante pour :

- suivre le déplacement d'un objet déterminé dans un « objet » composé (on pourra par exemple déterminer la vitesse du vent à parti de la mesure de celle d'un nuage)

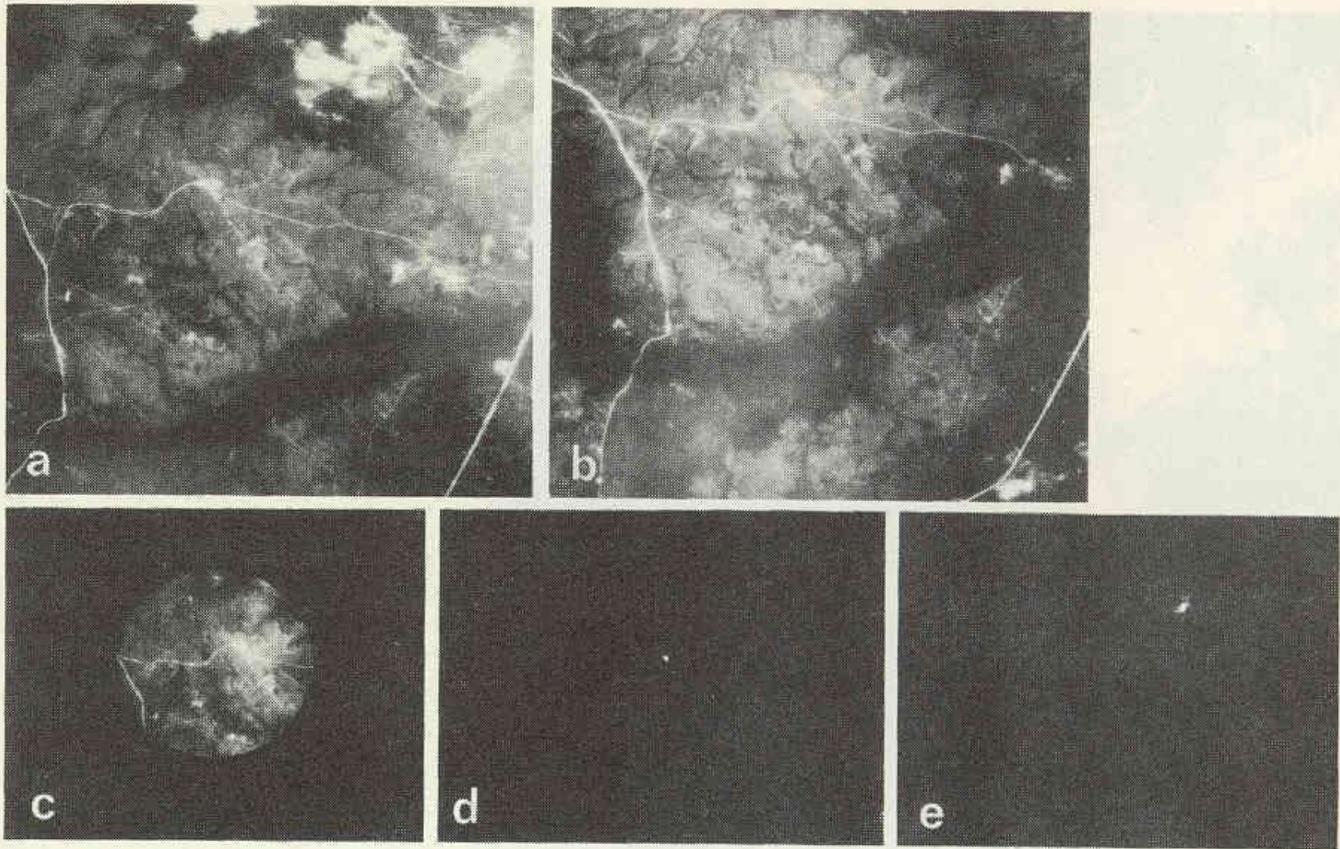
- la détection automatique d'objets déterminés (lecture - tri - robotique - applications militaires)



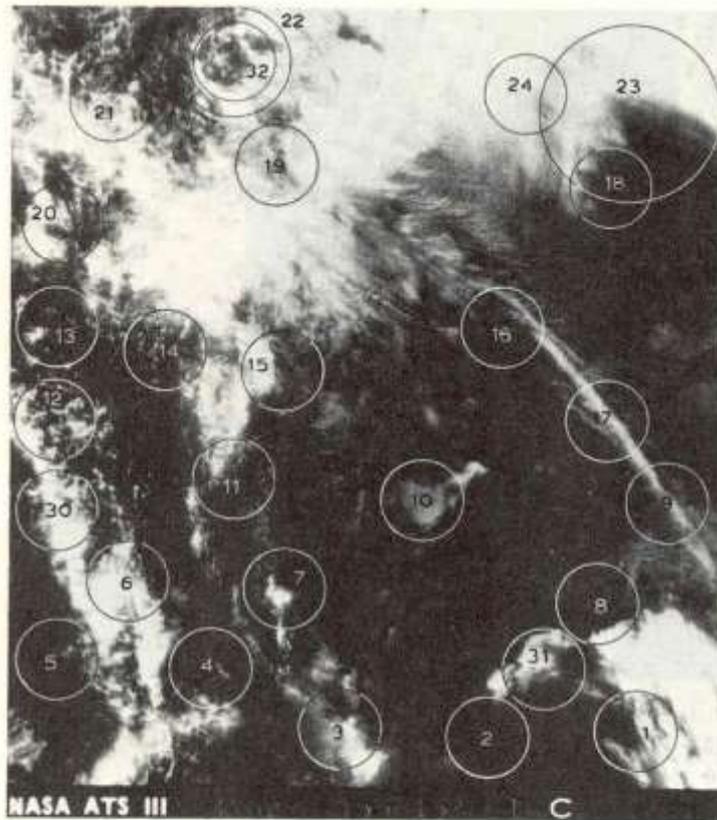
**Fig. 11.18.** Illustration of how a matched filter works. The reading from the light meter becomes maximum when the mask transmittance distribution matches the light distribution immediately in front of the mask



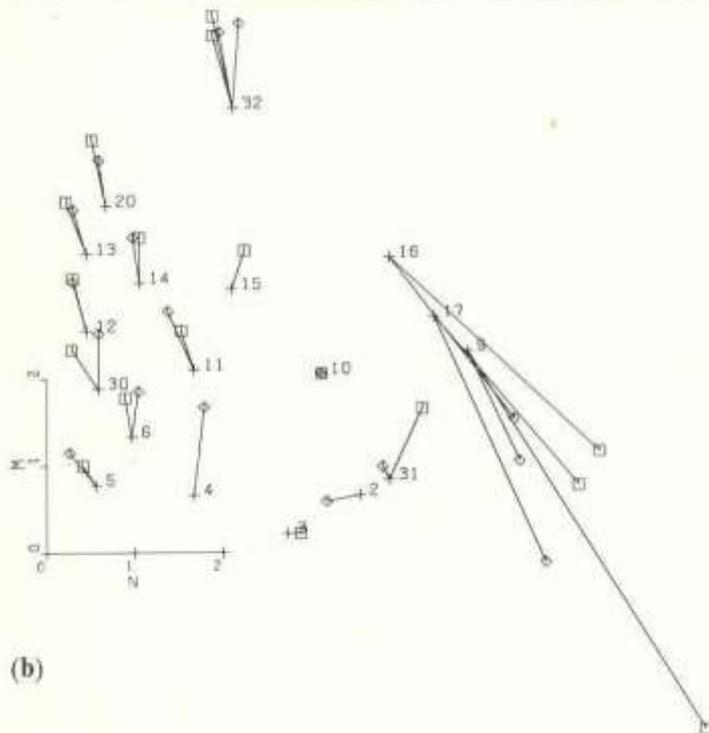
**Fig. 11.19 a, b.** A search for the location of a particular letter by means of a matched filter: (a) search for "a", (b) search for "b"



**Fig. 11.20 a – e.** The matched filter is used to trace cloud movement [11.7]. (a) Original picture of the cloud. (b) Another cloud picture a short time after (a) was taken. (c) A small section of the cloud picture (a). (d) The correlation between (a) and (c). (e) The correlation between (b) and (c). By using the difference in the positions of the peaks in (d) and in (e) the wind velocity can be calculated



(a)



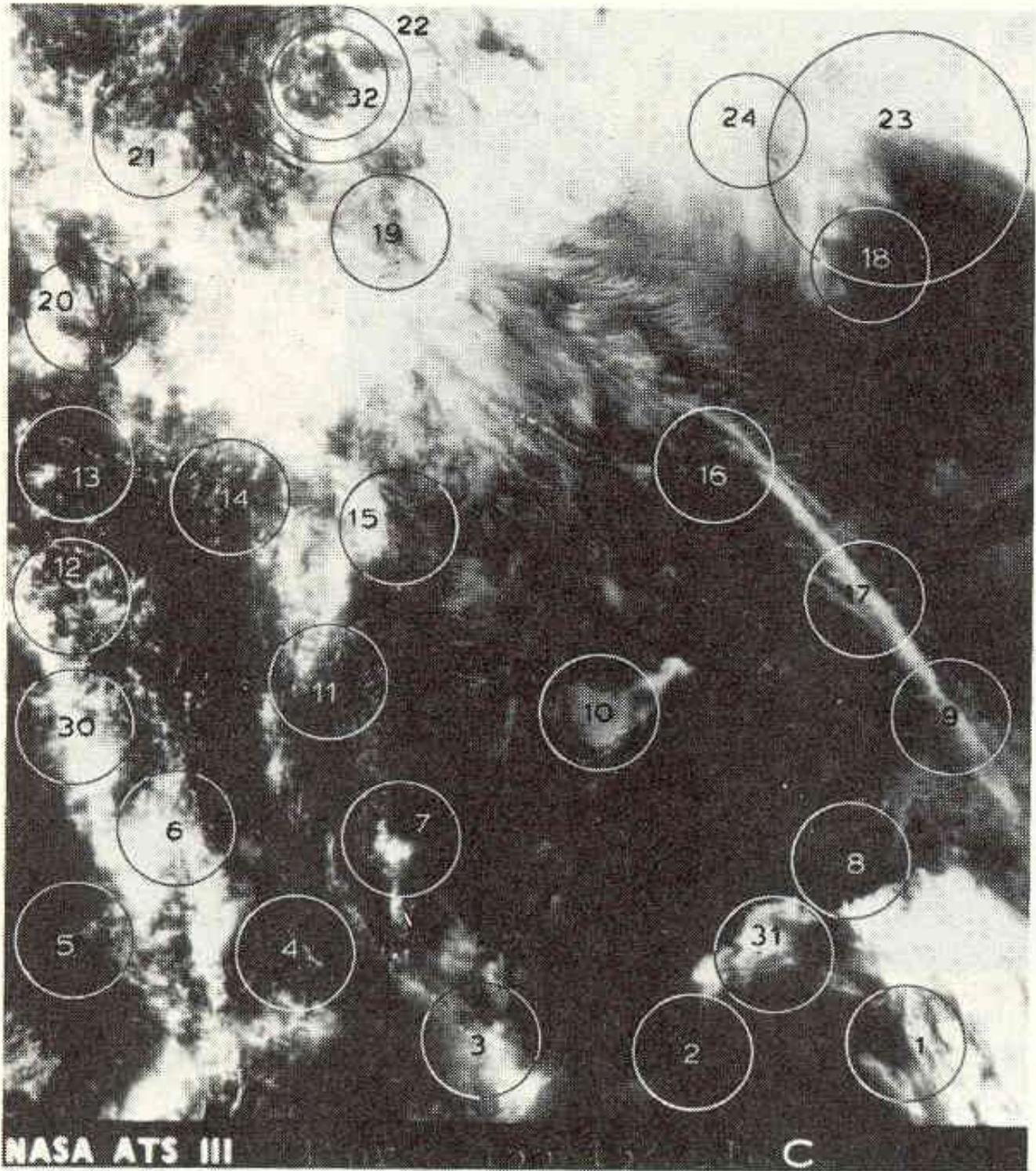
(b)

Fig. 11.21 a, b. The wind vector diagram obtained from the movement of the correlation peaks [11.7]. (a) In order to determine the cloud movements, the circled sections were first correlated with the picture they belong to and then with a picture taken at a short time later. (b) The vector diagram of the wind obtained from the movement of the correlation peaks

*Optique de Fourier et formation des images*

Yann VAILLS – date de dernière mise à jour : 06/09/2019

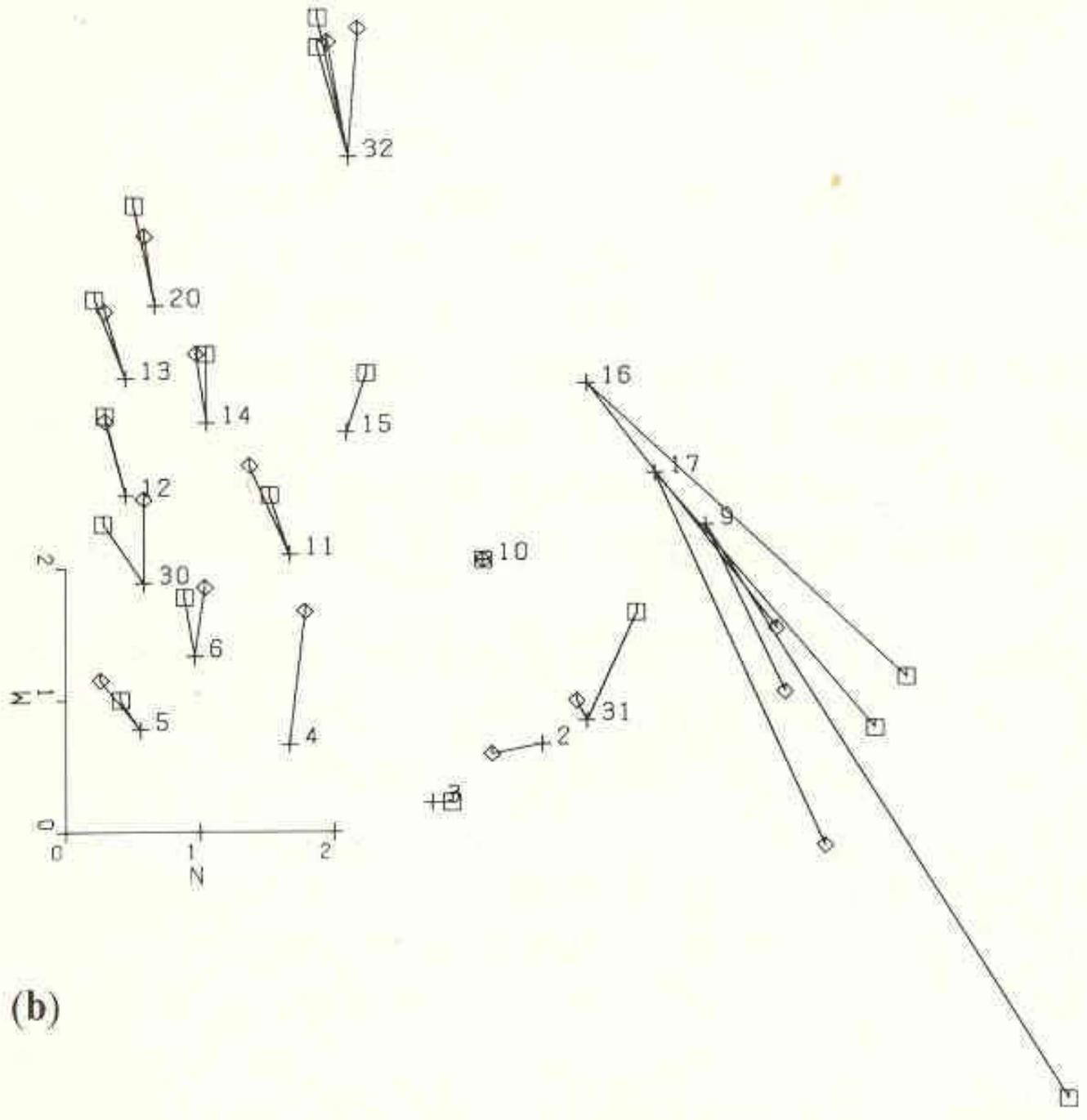
Ce cours est disponible à l'adresse suivante : <http://www.cemhti.cnrs-orleans.fr/?nom=Vaills>



*Optique de Fourier et formation des images*

*Yann VAILLS – date de dernière mise à jour : 06/09/2019*

*Ce cours est disponible à l'adresse suivante : <http://www.cemhti.cnrs-orleans.fr/?nom=Vaills>*



(b)

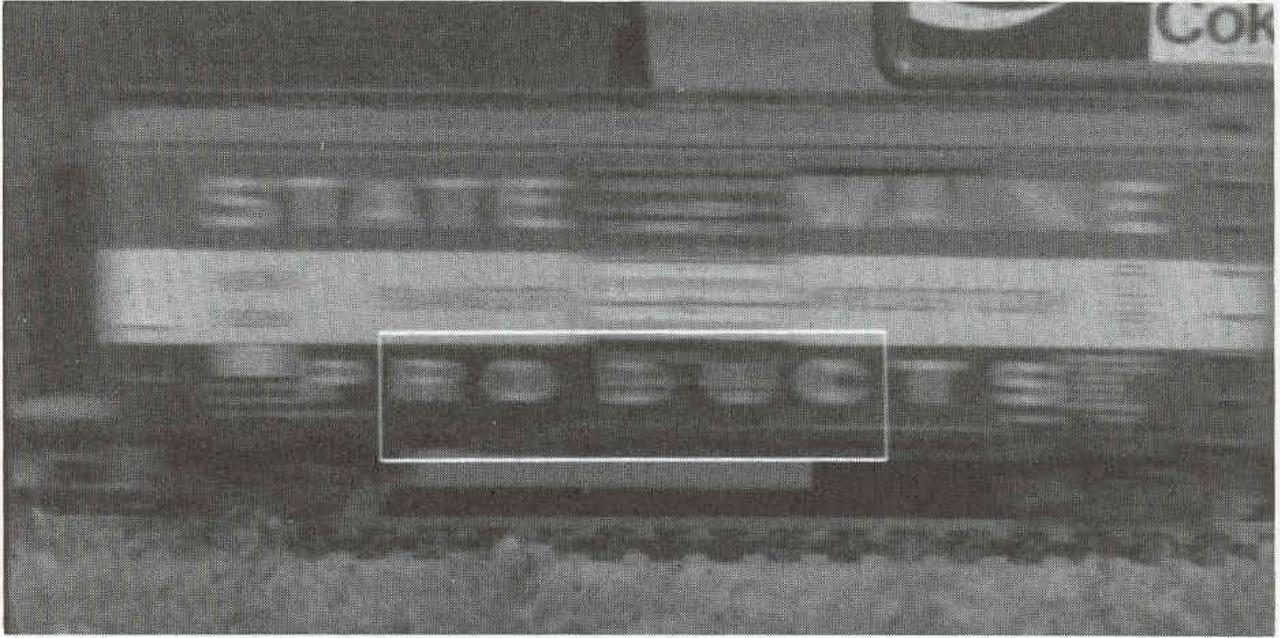


Fig. 8.7. The “train” image which is blurred due to uniform horizontal motion of the train

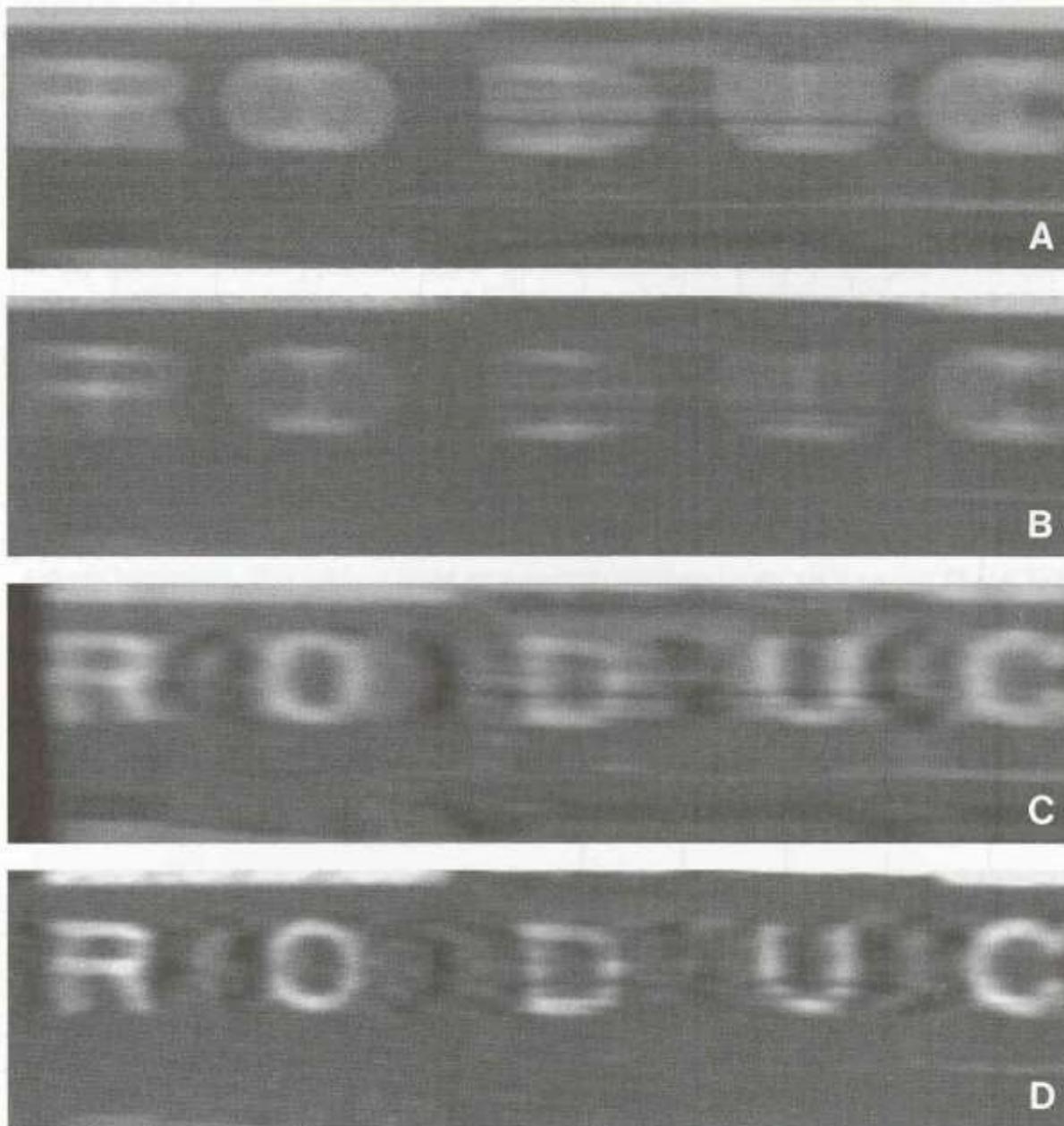


Fig. 8.14. (A) Blurred photographic image displayed in density domain; (B) blurred photographic image displayed in exposure domain; (C) restored image using the conventional Wiener filter displayed in density domain; (D) restored image using the proposed filter displayed in exposure domain



Fig. 8.5. The “license plate” image which is moderately blurred due to an out-of-focus camera, with the area of interest indicated by the frame



Fig. 8.6. The “license plate” image which is severely blurred due to an out-of-focus camera, with the area of interest indicated by the frame

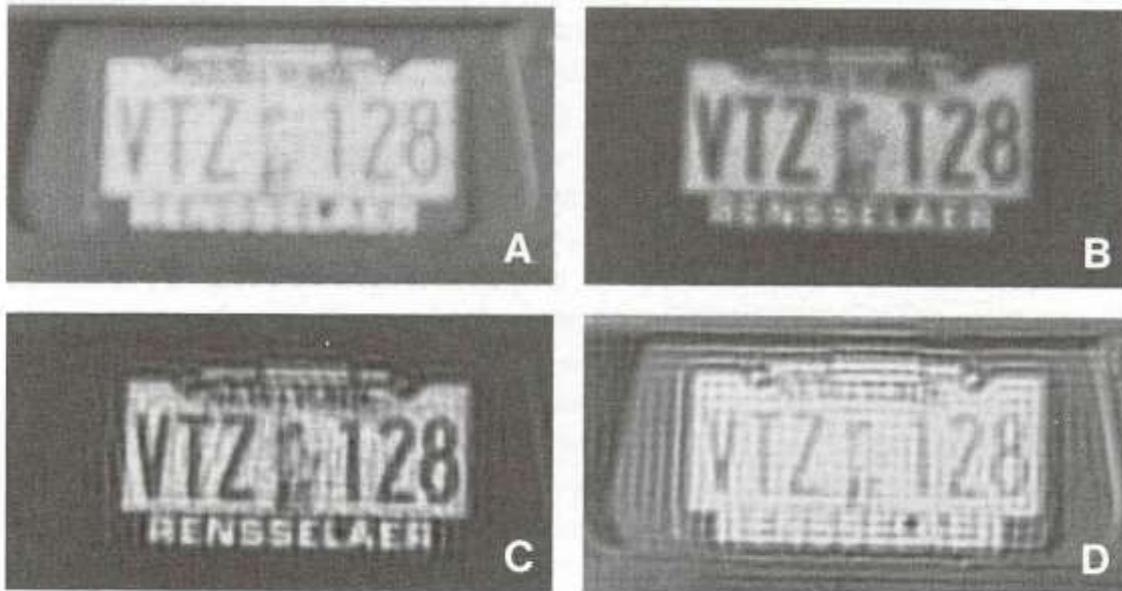


Fig. 8.11. Moderately blurred photographic image: (A) displayed in density domain; (B) displayed in exposure domain; (C) restored image using the proposed filter displayed in exposure domain; (D) restored image using the conventional Wiener filter displayed in density domain

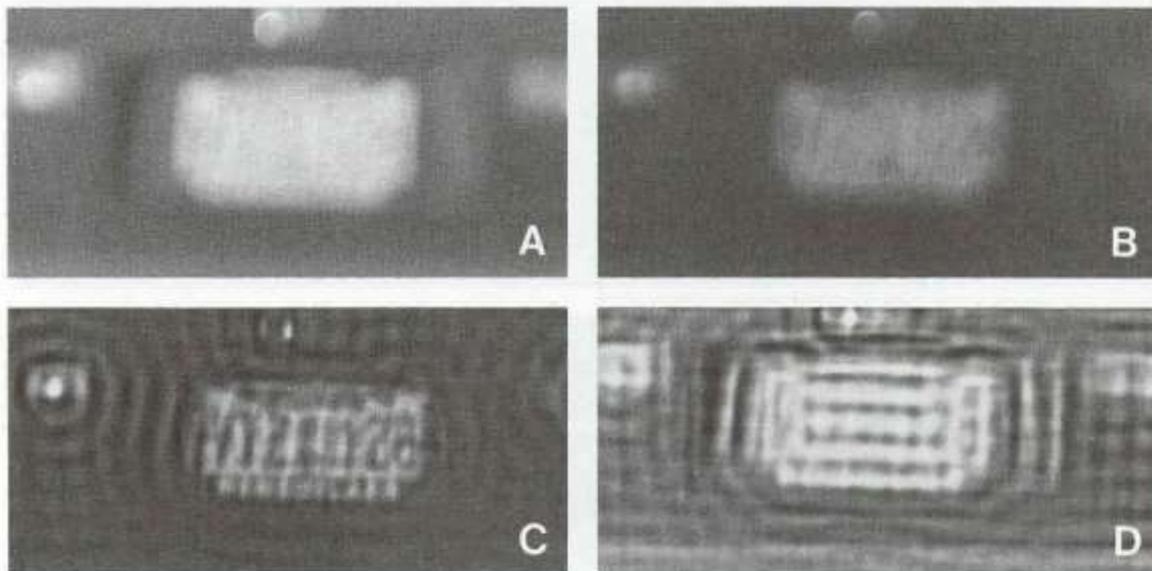
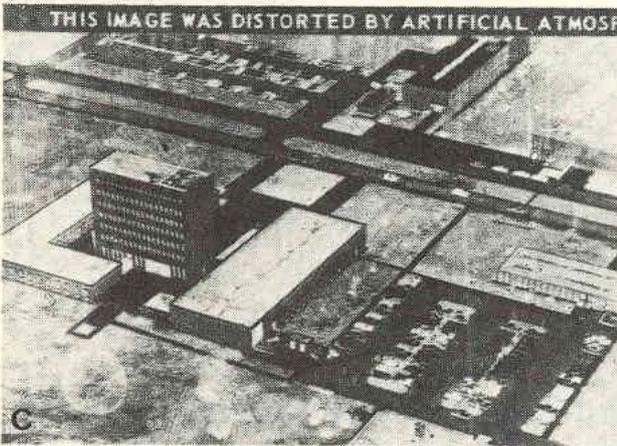
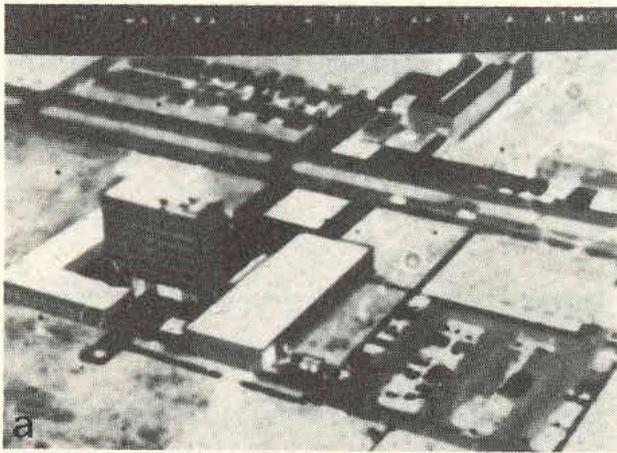
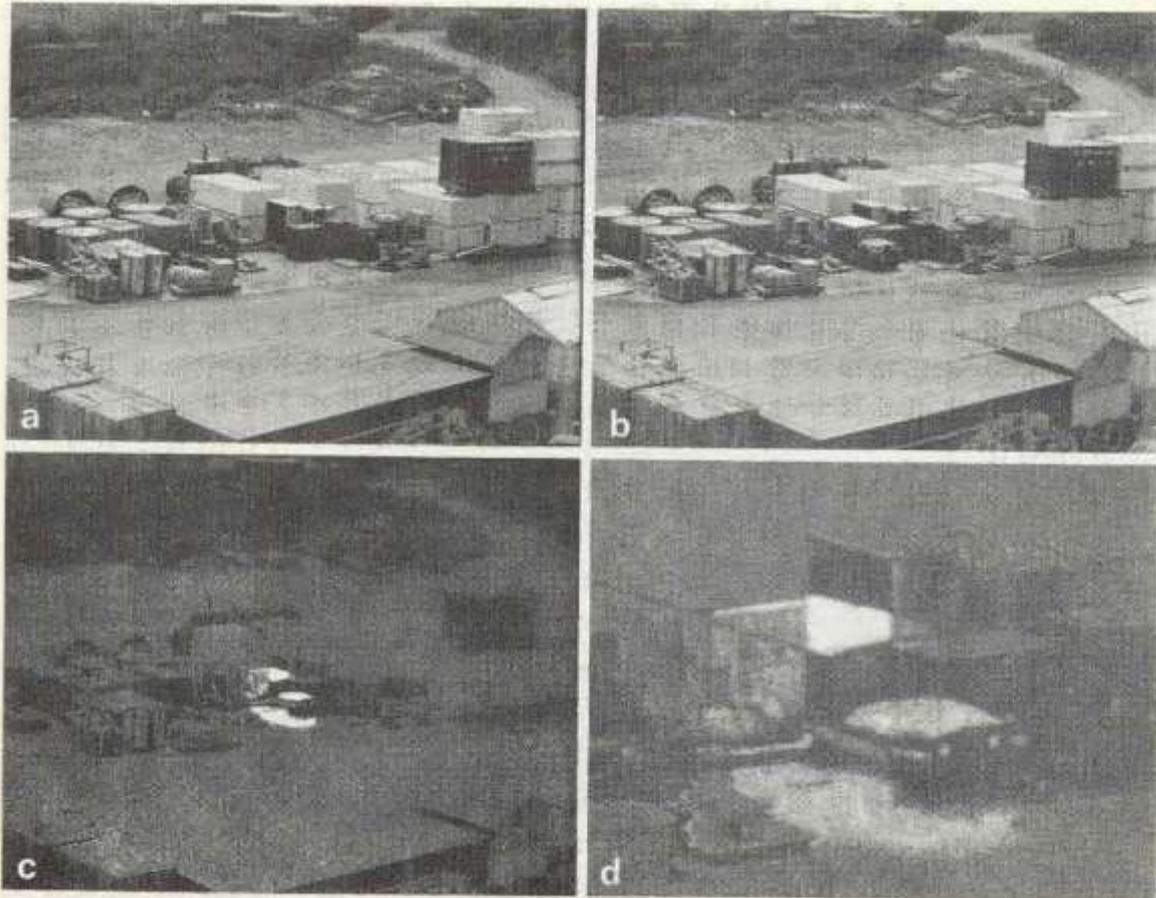


Fig. 8.12. Severely blurred photographic image: (A) displayed in density domain; (B) displayed in exposure domain; (C) restored image using the proposed filter displayed in exposure domain; (D) restored image using the conventional Wiener filter displayed in density domain



**Fig. 11.15 a – c.** Comparison of the results with an inverse filter and Wiener filter [11.9]. (a) A normal picture taken through perturbing medium. (b) Picture processed by an inverse filter. (c) Picture processed by the Wiener filter



**Fig. 8.28a–d.** Example showing the difference between two similar pictures [8.29]. (a) Picture without a jeep. (b) Picture with a jeep. (c) Only the portion which is different between (a) and (b) is detected; a picture of a jeep. (d) Expanded picture of the jeep